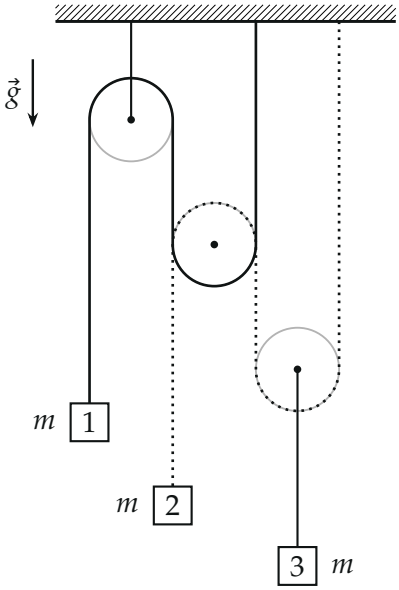
Система блоков с тремя грузами

Задача 6. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 6] Система, показанная на рисунке, состоит из трёх блоков, трёх одинаковых грузов, двух нитей (первая нить показана на рисунке сплошной линией, вторая — пунктирной) и короткой верёвочки. К концу первой нити, перекинутой через средний и левый блоки, прикреплён первый груз массой m. К концу второй нити, перекинутой через правый и средний блоки, прикреплён второй груз массой m. Третий груз такой же массой подвешен на верёвочке к оси правого блока. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Все блоки и нити можно считать невесомыми, нити и верёвочку нерастяжимыми, а силы трения пренебрежимо малыми. При вращении среднего блока первая и вторая нити не мешают друг другу. Найдите модули ускорений грузов.



▲ **Решение. Что происходит.** Левый блок закреплён, средний и правый подвешены на нитях и сами могут ехать вверх и вниз. Блоки невесомы и без трения, поэтому натяжение вдоль каждой нити одно и то же, а сумма сил на любой блок равна нулю (иначе невесомый блок получил бы бесконечное ускорение). Это даёт связь между натяжениями нитей

и верёвочки. Нити нерастяжимы, значит, смещения блоков и грузов связаны: сколько нить удлинилась в одном месте, на столько укоротилась в другом. Решаем в три шага: силы на блоки (связь натяжений) → второй закон Ньютона для грузов → кинематическая связь длин нитей.

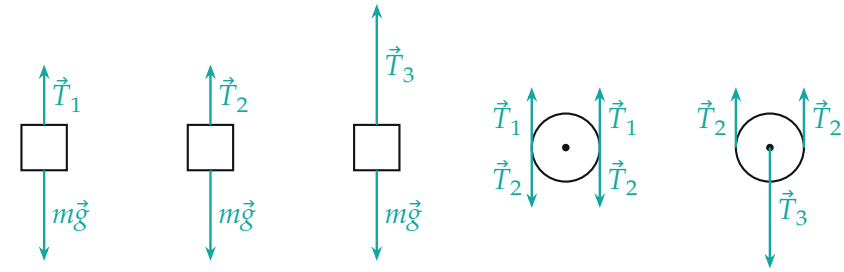
Обозначения. Ось y направим вниз, начало на потолке: тогда силы тяжести и положительные смещения идут по оси, и все проекции записываются одинаково. y_1, y_2, y_3 — координаты грузов, y_M и y_R — координаты осей среднего и правого блоков (левый блок неподвижен), a_i — проекции ускорений на ось y. T_1 — натяжение первой нити, T_2 — второй, T_3 — верёвочки.

1. Силы на блоках. Нить пересекает блок по двум участкам, каждый тянет блок вдоль себя. Первая нить обходит средний блок снизу: оба её участка идут вверх, сила $2T_1$ направлена вверх. Вторая нить обходит средний блок сверху: оба участка идут вниз, сила $2T_2$ направлена вниз. Блок невесом, сумма сил равна нулю:

$$2T_1 - 2T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T.$$

Правый блок: вторая нить обходит его снизу, оба участка идут вверх, сила $2T_2$ вверх; верёвочка с третьим грузом тянет вниз с силой T_3. Невесомый блок:

$$T_3 = 2T_2 = 2T.$$



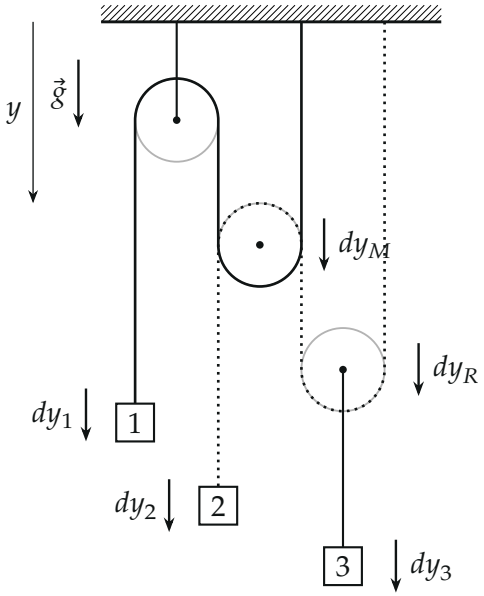
Силы, действующие на каждый груз и на каждый из подвижных блоков

2. Второй закон Ньютона для грузов. Для каждого груза запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y (вниз); сила тяжести положительна, натяжение направлено вверх и входит со знаком минус:

$$ma_1 = mg - T, \qquad ma_2 = mg - T, \qquad ma_3 = mg - 2T.$$

Четыре неизвестные: a_1, a_2, a_3 и T, уравнений три. Недостающее уравнение даёт нерастяжимость нитей.

3. Связь ускорений. Рассмотрим малое смещение: тело или блок сдвинулись вниз на dy_i. Длина нерастяжимой нити постоянна.



Смещения блоков и грузов при движении (все вниз положительны)

Первая нить состоит из участка от потолка до среднего блока (длина растёт на dy_M), участка от среднего блока до левого (также растёт на dy_M, так как левый блок неподвижен) и участка от левого блока до груза 1 (растёт на dy_1). Остальное — дуги на блоках, их длина не меняется. Сумма изменений равна нулю:

$$2\,dy_M + dy_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -2a_M.$$

Вторая нить: от потолка до правого блока (растёт на dy_R), от правого блока до среднего (на $dy_R - dy_M$), от среднего блока до груза 2 (на $dy_2 - dy_M$):

$$dy_R + (dy_R - dy_M) + (dy_2 - dy_M) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2a_M - 2a_R.$$

Верёвочка: груз 3 висит на оси правого блока, поэтому

$$a_3 = a_R.$$

4. Решаем. Из уравнений пункта 2 следует $a_1 = a_2$. Тогда $-2a_M = 2a_M - 2a_R$, откуда $a_R = 2a_M$, и

$$a_3 = a_R = 2a_M = -a_1.$$

Подставляем $a_3 = -a_1$ в уравнения для грузов:

$$g - \frac{2T}{m} = -\left(g - \frac{T}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad 2g = \frac{3T}{m},$$

откуда

$$T = \frac{2mg}{3}, \qquad a_1 = a_2 = g - \frac{T}{m} = \frac{g}{3}, \qquad a_3 = -\frac{g}{3}.$$

Грузы 1 и 2 опускаются, груз 3 поднимается; модули ускорений всех трёх равны $g/3$. (Блоки: $a_M = -a_1/2 = -g/6$, $a_R = a_3 = -g/3$ — оба поднимаются.)

Обратите внимание. У второй нити *два* участка выходят из правого блока вверх, а у первой — два участка выходят из среднего блока вверх; поэтому натяжения и стоят с множителем 2. Забытая «двойка» у T_3 или у dy_M ломает всё решение.

Проверка. Второй способ — второй закон Ньютона для всей системы «три груза + блоки + нити» (блоки и нити невесомы). Внешние силы: тяжесть $3mg$ вниз; потолок тянет вверх первую нить с силой T и вторую с силой T (в точках их крепления) и держит левый блок силой $2T$ (две

ветви первой нити тянут его вниз). Проекция на ось y:

$$m(a_1 + a_2 + a_3) = 3mg - 4T.$$

Слева $m\left(\frac{g}{3} + \frac{g}{3} - \frac{g}{3}\right) = \frac{mg}{3}$, справа $3mg - \frac{8}{3}mg = \frac{mg}{3}$ — совпало. Размерность: $g/3$ — ускорение.

Ответ. Модули ускорений всех грузов одинаковы и равны $a = g/3$ (грузы 1 и 2 опускаются, груз 3 поднимается).