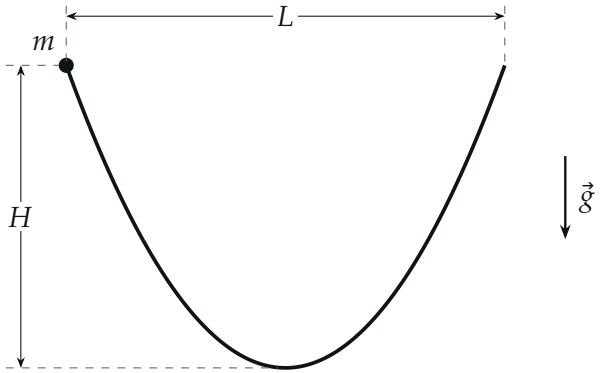
Бусинка на параболической проволоке

Задача 7. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 7] Отрезок проволоки изогнут в виде симметричного участка параболы и расположен так, что ось её симметрии вертикальна. На этот отрезок надевают маленькую бусинку массой m, удерживая её у одного из краёв проволоки. Затем бусинку отпускают без начальной скорости, и она начинает скользить по проволоке под действием силы тяжести. Найдите модуль силы, с которой бусинка будет давить на проволоку, находясь в самой нижней точке своей траектории. Трение пренебрежимо мало. Размеры L и H, указанные на рисунке, известны.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Бусинка надета на гладкую проволоку, поэтому сила реакции $\vec{N}$ перпендикулярна проволоке, а значит и скорости, и работы не совершает: скорость в нижней точке даёт закон сохранения энергии. В нижней точке скорость горизонтальна, и бусинка в этот момент движется по дуге окружности — «окружности кривизны» параболы в её вершине, радиус которой ρ нужно найти. Тогда центростремительное ускорение равно v^2/ρ, и оно создаётся разностью сил N и mg. Итак: энергия → радиус кривизны → второй закон Ньютона по вертикали.

Обозначения. Ось y направим вертикально вверх, начало — в вершине параболы (нижняя точка), ось x — горизонтально. Ось вверх удобна тем, что центр кривизны лежит на ней и центростремительное уско-

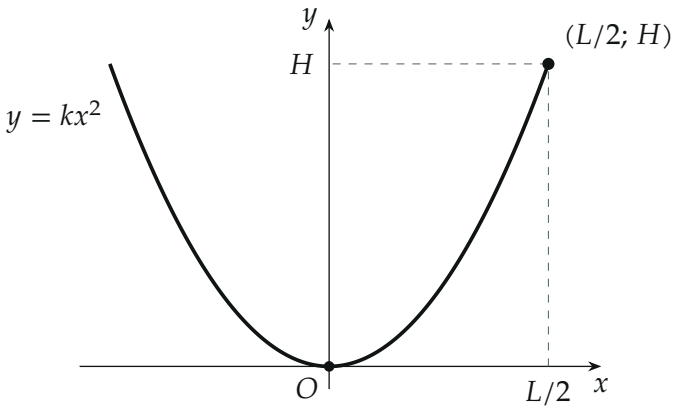
рение направлено вдоль y. v — скорость бусинки в нижней точке, ρ — радиус кривизны параболы в вершине.

1. Скорость внизу. Закон сохранения механической энергии для бусинки между верхним краем (скорость нуль, высота H над нижней точкой) и нижней точкой: $\vec{N}$ перпендикулярна скорости и работы не совершает, трения нет.

$$mgH = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gH.$$

2. Уравнение параболы. Парабола симметрична, вершина в начале координат: $y = kx^2$. Край проволоки — точка с $x = L/2$, $y = H$:

$$H = k\frac{L^2}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4H}{L^2}.$$

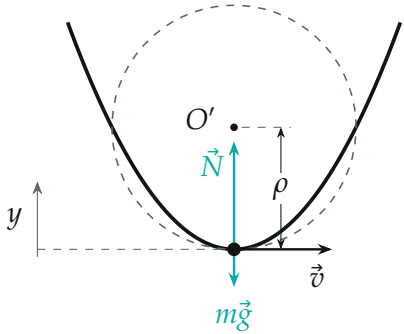


Парабола в осях с началом в вершине; край проволоки — точка $(L/2;\, H)$

3. Радиус кривизны в вершине. Окружность радиуса ρ с центром на оси y над вершиной, касающаяся параболы в начале координат, описывается уравнением $y = \rho - \sqrt{\rho^2 - x^2}$. Вблизи вершины, при $x \ll \rho$, корень раскладываем: $\sqrt{\rho^2 - x^2} \approx \rho - \dfrac{x^2}{2\rho}$, откуда $y \approx \dfrac{x^2}{2\rho}$. Вблизи вер-

шины парабола и её окружность кривизны совпадают, то есть

$$kx^2 = \frac{x^2}{2\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{2k} = \frac{L^2}{8H}.$$



Нижняя точка: окружность кривизны радиуса ρ (штриховая) почти совпадает с параболой возле вершины; сила N направлена к центру O'

Второй способ найти ρ. Бусинка проходит вершину с горизонтальной скоростью v: $x = vt$. Тогда $y = kx^2 = kv^2t^2 = \frac{2kv^2}{2}t^2$, то есть вертикальное ускорение $a_y = 2kv^2$. В вершине скорость горизонтальна, значит всё ускорение направлено вертикально и является центростремительным: $a_y = v^2/\rho$. Отсюда $\rho = 1/(2k)$ — тот же результат.

4. Второй закон Ньютона в нижней точке. Векторно: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Проецируем на ось y (к центру кривизны), центростремительное ускорение $a_y = v^2/\rho$; сила тяжести направлена вниз, N вверх:

$$\frac{mv^2}{\rho} = N - mg \quad \Rightarrow \quad N = mg + \frac{mv^2}{\rho}.$$

Подставляем $v^2 = 2gH$ и $\rho = L^2/(8H)$:

$$N = mg + m \cdot 2gH \cdot \frac{8H}{L^2} = mg\left(1 + \frac{16H^2}{L^2}\right).$$

По третьему закону Ньютона бусинка давит на проволоку с той же по модулю силой:

$$F = mg\left(1 + \frac{16H^2}{L^2}\right).$$

Обратите внимание. Нельзя считать $N = mg$ и нельзя брать за радиус кривизны $L/2$ или H: радиус определяется кривизной параболы в самой вершине, а не её размерами.

Проверка. Размерность: $16H^2/L^2$ безразмерно, F — сила. Предел $H \to 0$ (проволока плоская): $F \to mg$ — бусинка просто лежит на ней. Числовой пример: $L = 2H$ (полуширина равна высоте): $\rho = L^2/(8H) = H/2$, $v^2 = 2gH$, $F = mg(1 + 4) = 5mg$, а для окружности радиуса H (полуокружность) вышло бы $3mg$ — парабола в вершине круче окружности ($\rho = H/2 < H$), и давление больше.

Ответ. $N = mg\left(1 + \frac{16H^2}{L^2}\right)$.