Цикл из политропных процессов

Задача 8. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 8] Один моль идеального газа участвует в циклическом процессе $1 \to 2 \to 3 \to 1$ тепловой машины, работающей в режиме теплового двигателя. В состоянии 1 газ имеет температуру T_1 и объём V_1. Известно, что все переходы газа из одного состояния в другое — политропические. Показатель политропы процесса $2 \to 3$ на единицу больше показателя политропы процесса $3 \to 1$ и на единицу меньше показателя политропы процесса $1 \to 2$. В процессе $1 \to 2$ объём газа увеличивается в k раз. Один из процессов цикла — изотермический, причём в этом процессе объём газа изменяет своё значение в максимально широких пределах в этом цикле.

1. Определите объём и температуру газа в состоянии 3.
2. Изобразите на pV-диаграмме цикл, соответствующий условию задачи, указав для каждого из процессов его показатель политропы.

Справка: Политропическим называется процесс, в течение которого теплоёмкость газа не изменяется: $C = \text{const}$. Уравнение такого процесса имеет вид $pV^n = \text{const}$, или $p_1V_1^n = p_2V_2^n$. Величину n называют показателем политропы.

▲ **Решение. Что происходит.** Цикл состоит из трёх политроп, показатели которых образуют ряд $n-1,\ n,\ n+1$. Известно, что один процесс — изотерма, а изотерма — это политропа с $n = 1$. Значит, возможны три варианта: изотермой может быть $3 \to 1$, $2 \to 3$ или $1 \to 2$. Для каждого варианта мы выразим состояния 2 и 3 через заданные V_1, T_1, k и проверим условие «в изотерме объём меняется шире всего». Это условие и отберёт единственный цикл. Затем нарисуем его.

Обозначения. Газ — один моль, $pV = RT$. Подставив $p = RT/V$ в $pV^n = \text{const}$, получим уравнение политропы в переменных T, V:

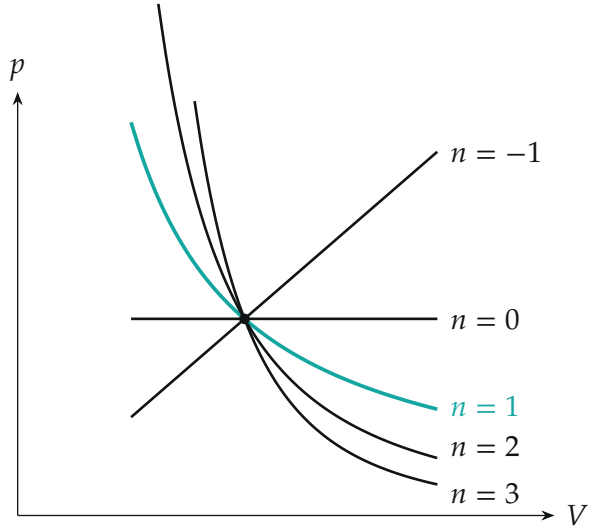
$$TV^{n-1} = \text{const}.$$

Для изотермы $n = 1$ получаем $T = \text{const}$; для изобары $n = 0$ получаем $T/V = \text{const}$. Показатель процесса $2 \to 3$ обозначим n; тогда по

условию

$$n_{31} = n - 1, \qquad n_{23} = n, \qquad n_{12} = n + 1.$$

По условию объём в процессе $1 \to 2$ растёт: $V_2 = kV_1$, $k > 1$.



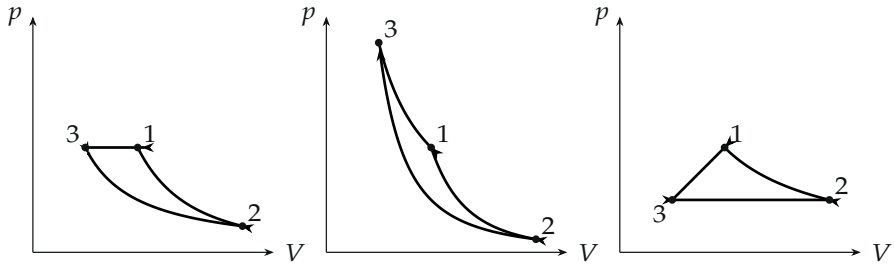
Политропы $pV^n = \text{const}$ через одно состояние: чем больше n, тем круче падает p с ростом V; $n = 0$ — изобара, $n = 1$ — изотерма (бирюзовая); точка — состояние 1

1. Перебор: какой процесс изотермический.

Вариант А: изотерма $2 \to 3$ ($n = 1$; тогда $n_{31} = 0$ — изобара, $n_{12} = 2$). Для $1 \to 2$ имеем $TV = \text{const}$: $T_2V_2 = T_1V_1$, откуда $T_2 = T_1/k$. Изотерма $2 \to 3$: $T_3 = T_2 = T_1/k$. Изобара $3 \to 1$: $V_3/T_3 = V_1/T_1$, откуда $V_3 = V_1\,T_3/T_1 = V_1/k$. Объём меняется: в процессе $1 \to 2$ в k раз, в изотерме $2 \to 3$ от kV_1 до V_1/k, то есть в k^2 раз, в изобаре $3 \to 1$ в k раз. Изотерма меняет объём шире всего: условие выполнено.

Вариант Б: изотерма $3 \to 1$ ($n = 2$: $n_{23} = 2$, $n_{12} = 3$). Для $1 \to 2$ имеем $TV^2 = \text{const}$: $T_2 = T_1/k^2$. Для $2 \to 3$ имеем $TV = \text{const}$: $T_3V_3 = T_2V_2 = T_1V_1/k$. Изотерма $3 \to 1$: $T_3 = T_1$, значит $V_3 = V_1/k$. Объём в изотерме $3 \to 1$ меняется от V_1/k до V_1, то есть в k раз, а в процессе $2 \to 3$ — от kV_1 до V_1/k, то есть в k^2 раз: шире, чем в изотерме. Условие нарушено.

Вариант В: изотерма $1 \to 2$ ($n = 0$: $n_{23} = 0$ — изобара, $n_{31} = -1$). Для $1 \to 2$: $T_2 = T_1$ (изотерма). Для $3 \to 1$ ($n_{31} = -1$) имеем $T/V^2 = \text{const}$. Изобара $2 \to 3$: $V_3/T_3 = V_2/T_2 = kV_1/T_1$; из $T_3/V_3^2 = T_1/V_1^2$ находим $T_3 = T_1 V_3^2/V_1^2$, и тогда $V_3 = V_1/k$, $T_3 = T_1/k^2$. В изотерме $1 \to 2$ объём вырос в k раз, в изобаре $2 \to 3$ — от kV_1 до V_1/k, в k^2 раз: шире. Условие нарушено.



А: изотерма $2 \to 3$ ширше всех — она

Б: изотерма $3 \to 1$ шире $2 \to 3$

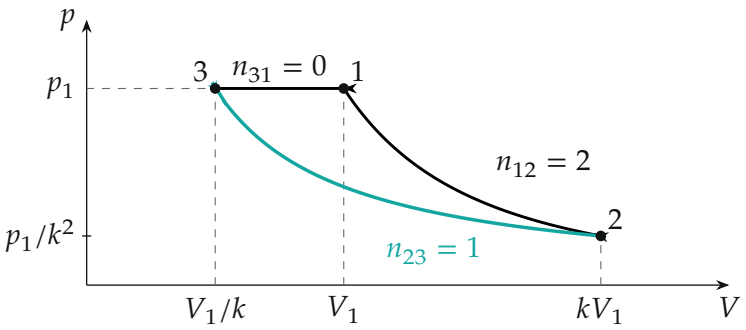
В: изотерма $1 \to 2$ шире $2 \to 3$

Три варианта, где p и V в единицах p_1 и V_1 при $k = 2$. Подходит только первый: в вариантах Б и В изотерма не самая широкая по объёму

2. Ответ на первый вопрос. Подходит только вариант А:

$$V_3 = \frac{V_1}{k}, \qquad T_3 = \frac{T_1}{k}.$$

3. Диаграмма. Давления состояний: $p_1 = RT_1/V_1$; $p_3 = RT_3/V_3 = p_1$ (изобара $3 \to 1$ — горизонтальный отрезок); $p_2 = RT_2/V_2 = p_1/k^2$. Кривая $1 \to 2$ — $pV^2 = \text{const}$, круче изотермы; $2 \to 3$ — гипербола $pV = \text{const}$; $3 \to 1$ — горизонталь. Направление обхода $1 \to 2 \to 3 \to 1$ — по часовой стрелке (верхняя кривая $1 \to 2$ идёт вправо, нижняя $2 \to 3$ — влево).



Цикл при $k = 2$ с показателями политропы на каждом процессе: $n_{31} = 0$ (изобара), $n_{12} = 2$, $n_{23} = 1$ (изотерма $T_2 = const$)

Обратите внимание. Условие про «максимально широкие пределы» — не украшение: без него подходили бы все три варианта (каждый даёт цикл с положительной работой), и состояние 3 не определялось бы однозначно.

Проверка. Работа цикла в варианте А должна быть положительной — это тепловой двигатель. Считаем по участкам, $p_1V_1 = RT_1$, $p_2V_2 = RT_1/k$:

$$A = p_1V_1\left(1-\frac{1}{k}\right)+p_2V_2\ln\frac{V_3}{V_2}+p_1\left(V_1-\frac{V_1}{k}\right) = \frac{2RT_1}{k}\,(k-1-\ln k)\,.$$

При $k > 1$ выполнено $k - 1 > \ln k$, поэтому $A > 0$; для $k = 2$ получаем $A = 0{,}31\,RT_1$, и численное интегрирование даёт то же. Состояние 3: $T_3 = T_1/k$ и $V_3 = V_1/k$ дают $p_3 = RT_3/V_3 = p_1$, это согласуется с изобарой $3 \to 1$. Размерность: V_3 — объём, T_3 — температура.

Ответ. 1) $V_3 = V_1/k$, $T_3 = T_1/k$; 2) диаграмма на рисунке: $n_{31} = 0$ (изобара), $n_{12} = 2$, $n_{23} = 1$ (изотерма, $T_2 = \text{const}$).