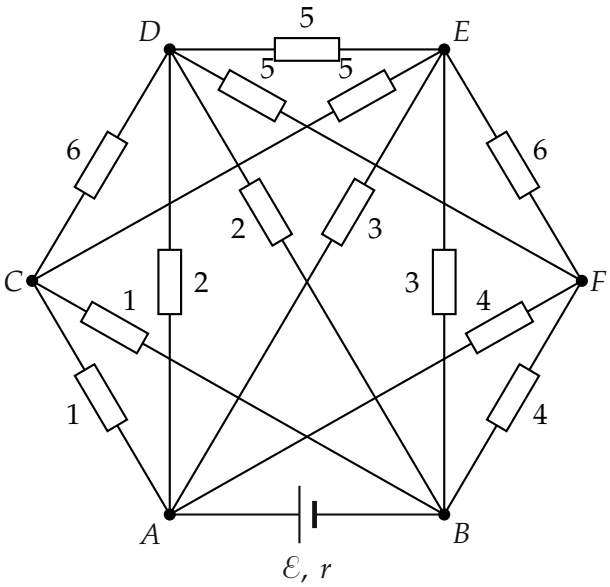
Мощность в цепи ACDEFB

Задача 9. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 9] Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в участке $ACDEFB$ цепи, подключённом в точках A и B к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}04$ Ом. Сопротивления резисторов указаны на схеме в Ом, сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Провода соединены только в местах, обозначенных точками.



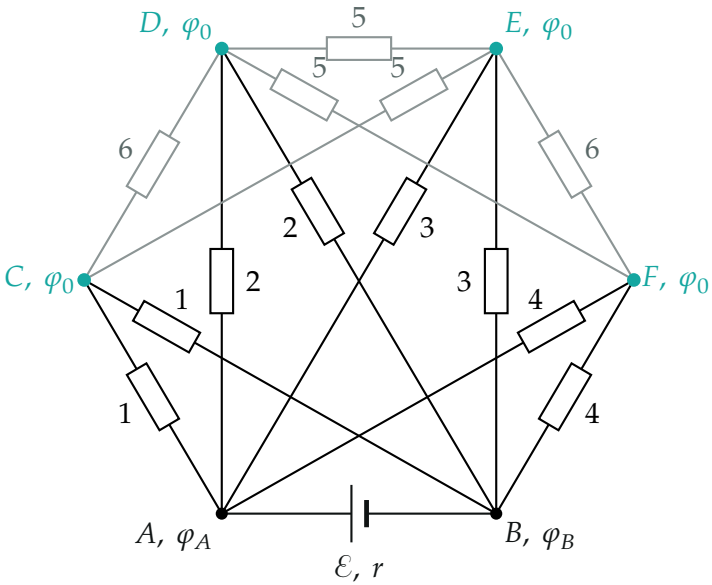
▲ **Решение. Что происходит.** Схема на первый взгляд запутанная, но у неё есть скрытая симметрия: каждая из вершин C, D, E, F соединена с A и с B двумя резисторами *одинакового* сопротивления (1 и 1, 2 и 2, 3 и 3, 4 и 4 Ом). Значит, каждая такая вершина делит напряжение между A и B пополам, и у всех четырёх вершин один и тот же потенциал. Тогда ток через пять резисторов, соединяющих эти вершины между собой (6, 5, 6, 5, 5 Ом), равен нулю, и они ни на что не влияют. Остаются четыре параллельные ветви A–X–B. Класс задачи — схема с эквипотенциальными узлами: найти узлы с равными потенциалами, выбросить резисторы без тока, потом закон Ома для полной цепи и мощность.

Обозначения. φ_A, φ_B — потенциалы точек A и B, r_X — сопротивление каждого из двух резисторов между X и точками A, B ($X = C, D, E, F$): $r_C = 1$ Ом, $r_D = 2$ Ом, $r_E = 3$ Ом, $r_F = 4$ Ом.

1. Потенциалы вершин. Проверим предположение: все четыре вершины имеют потенциал

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}.$$

Тогда для вершины X ток из A равен $(\varphi_A - \varphi_0)/r_X$, а ток в B равен $(\varphi_0 - \varphi_B)/r_X$ — они совпадают, так как $\varphi_A - \varphi_0 = \varphi_0 - \varphi_B$. Между вершинами разность потенциалов нулевая, и токи через резисторы CD, DE, EF, CE, DF равны нулю. Закон сохранения заряда в узле (сумма токов в вершину равна нулю) выполнен во всех четырёх вершинах, значит, это и есть решение системы уравнений цепи — а оно единственно.

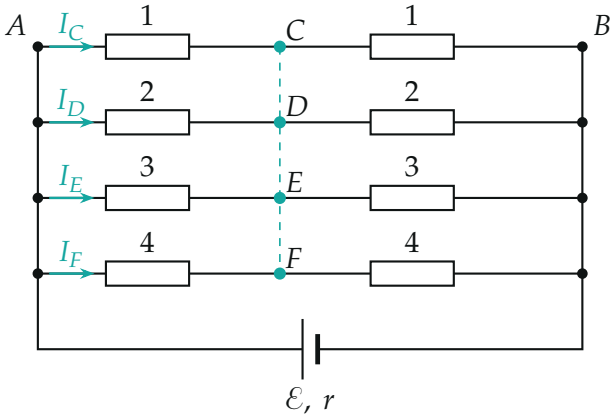


Вершины C, D, E, F (бирюзовые) — один потенциал φ_0; серые резисторы тока не пропускают

2. Сопротивление участка. Остаются четыре параллельные ветви, в каждой два одинаковых резистора последовательно: $2r_X = 2, 4, 6, 8$ Ом.

Проводимости складываются:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{12+6+4+3}{24}=\frac{25}{24}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{24}{25}\,\text{Ом}=0{,}96\,\text{Ом}.$$



Эквивалентная схема: четыре параллельные ветви A–X–B и токи в них

3. Ток в цепи. Закон Ома для полной цепи, сопротивление участка R и внутреннее r последовательно:

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}=\frac{5}{0{,}96+1{,}04}\,\text{А}=2{,}5\,\text{А},\qquad U=IR=2{,}5\cdot 0{,}96\,\text{В}=2{,}4\,\text{В}.$$

4. Токи в ветвях и мощности на резисторах. К каждой ветви приложено напряжение $U=2{,}4$ В, ток в ветви $I_X=\dfrac{U}{2r_X}$, мощность на каждом из двух её резисторов $P_X=I_X^2 r_X$:

X	$2r_X$, Ом	I_X, А	P_X, Вт
C	2	1,2	1,44
D	4	0,6	0,72
E	6	0,4	0,48
F	8	0,3	0,36

Сумма токов $1{,}2+0{,}6+0{,}4+0{,}3=2{,}5$ А совпадает с током I в цепи.

Мощности: $P_{AC} = P_{CB} = 1{,}44$ Вт, $P_{AD} = P_{DB} = 0{,}72$ Вт, $P_{AE} = P_{EB} = 0{,}48$ Вт, $P_{AF} = P_{FB} = 0{,}36$ Вт; на CD, CE, DE, DF, EF мощность нулевая.

5. Полная мощность участка.

$$P = 2(1{,}44 + 0{,}72 + 0{,}48 + 0{,}36)\ \text{Вт} = 6\ \text{Вт}.$$

Обратите внимание. Равенство потенциалов следует из того, что у каждой вершины *оба* резистора — к A и к B — одинаковы. Резисторы разных вершин сильно отличаются (1, 2, 3, 4 Ом), но это не мешает: уравнивается потенциал внутри каждой ветви, а не между ветвями. Если бы, например, AD было 2, а DB — 3 Ом, потенциалы вершин стали бы разными, и резисторы 5 и 6 Ом между ними пропускали бы ток.

Проверка. Второй способ: полная мощность из мощности источника. Источник отдаёт $\mathcal{E}I = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ Вт, на внутреннем сопротивлении теряется $I^2r = 6{,}25 \cdot 1{,}04 = 6{,}5$ Вт, остаётся $12{,}5 - 6{,}5 = 6$ Вт — как и на участке. Ещё один способ: $P = UI = 2{,}4 \cdot 2{,}5 = 6$ Вт и $P = U^2/R = 5{,}76/0{,}96 = 6$ Вт. Размерность: ватты.

Ответ. На отдельных резисторах выделяются мощности: $P_{AC} = P_{CB} = 1{,}44$ Вт, $P_{AF} = P_{FB} = 0{,}36$ Вт, $P_{AD} = P_{DB} = 0{,}72$ Вт, $P_{AE} = P_{EB} = 0{,}48$ Вт, $P_{CD} = P_{CE} = P_{DE} = P_{DF} = P_{EF} = 0$. На всех резисторах цепи $ACDEFB$ выделяется тепловая мощность $P = 6$ Вт.