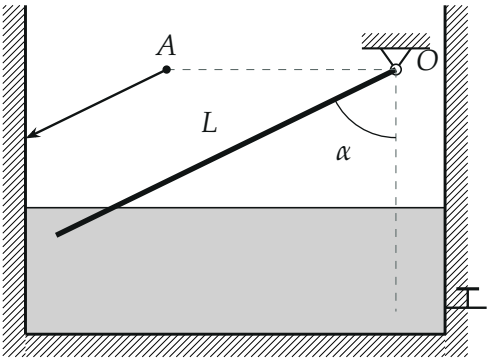
Палочка в жидкости и лазерный луч

Задача 10. [МОШ 2014/15, 10 класс, задача 10] Отличник Тимофей уравновесил тонкую однородную палочку, прикреплённую одним концом к шарниру, опустив другой её конец в вертикальный сосуд с жидкостью. При этом палочка находилась в равновесии, располагалась под углом α к вертикали и была погружена в жидкость на $1/n$ часть своей длины. Площадь горизонтального поперечного сечения сосуда S, длина палочки L, плотность её материала ρ. Стенки сосуда и поверхность палочки посеребрены.

В некоторой точке A над поверхностью жидкости, на одной высоте с точкой крепления палочки, экспериментатор Тимофей расположил выходное окно лазерной указки, и направил от неё на стенку сосуда узкий световой луч, идущий параллельно палочке. Этот луч, распространяясь только в воздухе, отразился от стенки сосуда, затем отразился от палочки, и вернулся обратно в точку A. Но тут «добрая» подруга Анфиса решила привлечь внимание Тимофея и приоткрыла кран, через который жидкость начала медленно выливаться из сосуда. Тимофей сначала рассердился, но быстро успокоился, так как понял, что через некоторое время луч всё равно вернётся в точку A — главное, вовремя закрыть кран! Какую массу жидкости следует вылить из сосуда для того, чтобы при неизменном угле падения света на стенку сосуда луч света, испущенный из точки A, распространяясь только в воздухе, опять вернулся в эту точку?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие с осью (правило моментов) плюс отражение луча. Палочка опирается на жидкость силой Архимеда; оба момента пропорциональны синусу угла, поэтому погружённая длина палочки от угла и уровня не зависит. При вытекании палочка поворачивается к вертикали, и луч снова возвращается в A при определённом новом угле; по углу находим понижение уровня и массу вытекшей жидкости.

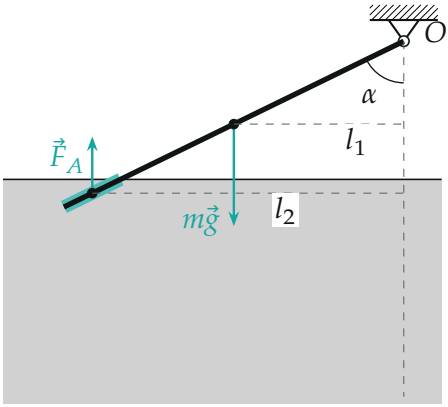
Обозначения. Палочка: площадь сечения σ, длина L, плотность ρ, погружённая длина $\ell = L/n$; $\rho_ж$ — плотность жидкости (в условии не дана, найдём через ρ и n). O — шарнир; угол палочки с вертикалью обозначим θ: в начале $\theta = \alpha$, в конце $\theta = \beta$.

1. Равновесие палочки. Правило моментов относительно шарнира O (реакция шарнира момента не даёт). Сила тяжести $\rho\sigma Lg$ приложена в середине палочки, сила Архимеда $\rho_ж\sigma\ell g$ — в середине погружённой части; плечи — горизонтальные расстояния до вертикали через O:

$$\rho\sigma Lg\cdot\frac{L}{2}\sin\theta=\rho_ж\sigma\ell g\left(L-\frac{\ell}{2}\right)\sin\theta\;\Rightarrow\;\rho\frac{L^2}{2}=\rho_ж\ell\left(L-\frac{\ell}{2}\right).$$

Угол сократился: при любом угле равновесия погружённая длина одна и та же, $\ell = L/n$. Подставляем:

$$\rho\frac{L^2}{2}=\rho_ж\frac{L}{n}\cdot L\frac{2n-1}{2n}\quad\Rightarrow\quad\rho_ж=\rho\frac{n^2}{2n-1}.$$



Моменты относительно шарнира O: сила тяжести (в середине палочки, плечо l_1) и сила Архимеда (в середине погружённой части — бирюзовый отрезок, плечо l_2)

2. Уровень жидкости. Жидкость пересекает палочку на расстоянии $L - \ell = L\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ от O вдоль палочки, то есть на глубине $(L - \ell)\cos\theta$ ниже горизонтали, проходящей через O (и через A). Если палочка повернулась от угла α к углу β, уровень сместился на

$$\Delta H = (L - \ell)\,(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Жидкость вытекает, уровень понижается, значит, $\cos\beta > \cos\alpha$, $\beta < \alpha$: палочка становится более вертикальной.

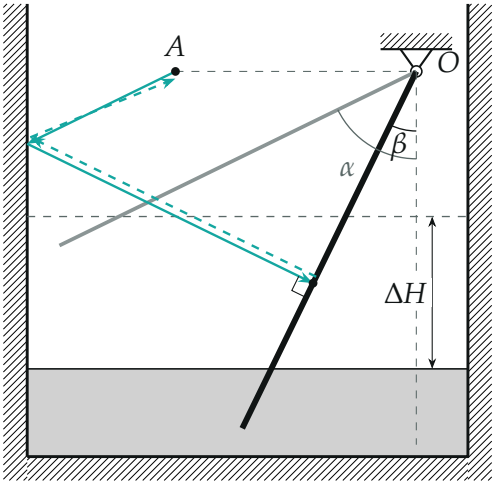
3. Куда должен идти луч во втором положении. Точка A и направление луча прежние, поэтому до палочки луч идёт той же дорогой; вертикальная стенка меняет знак горизонтальной составляющей. Ось x вправо, y вверх:

$$\vec{d} = (-\sin\alpha,\, -\cos\alpha) \text{ (к стенке)}, \quad \vec{d}_1 = (\sin\alpha,\, -\cos\alpha) \text{ (после)}.$$

Палочка во втором положении направлена по $\vec{n} = (-\sin\beta,\, -\cos\beta)$. Чтобы луч вернулся в A по своему следу (отразился от стенки второй раз

и пришёл в A), он должен упасть на палочку перпендикулярно, $\vec{d}_1 \cdot \vec{u} = 0$:

$$-\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$



Серая палочка — начальное положение, чёрная — конечное; уровень жидкости опустился на ΔH. Сплошной луч идёт к палочке, пунктир — обратный путь по тому же маршруту

4. Понижение уровня. Из условия $\cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$:

$$\Delta H = (L-\ell)(\sin\alpha - \cos\alpha) = L\,\frac{n-1}{n}\,(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Понижение уровня положительно при $\sin\alpha > \cos\alpha$, то есть при $\alpha > 45^\circ$ (иначе палочка должна была бы подняться и уровень вырос бы, чего вытеканием не добиться). При $\alpha = 45^\circ$ луч падает на палочку перпендикулярно уже в начале, $\Delta H = 0$.

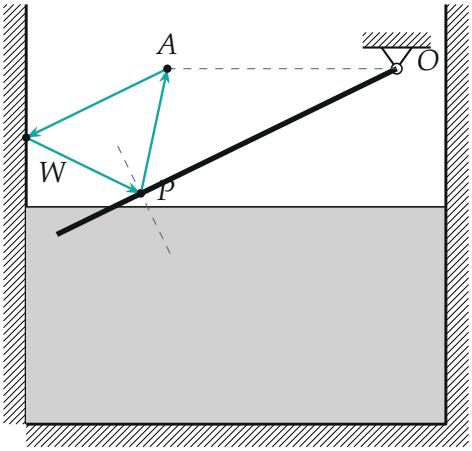
5. Масса вытекшей жидкости.

$$m_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}}\,S\,\Delta H = \rho\,\frac{n^2}{2n-1}\cdot S\cdot L\,\frac{n-1}{n}(\sin\alpha - \cos\alpha),$$

$$m_{\text{ж}} = \rho\,S\,L\,\frac{n(n-1)}{2n-1}\,(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Обратите внимание. Плотность жидкости не дана: она находится из равновесия. Погружённая длина палочки при вытекании не меняется, поэтому вытекший объём равен именно $S\,\Delta H$.

Замечание. Возможен и другой возврат — тем же путём, что в первом положении ($A \to W \to P \to A$, рисунок ниже): он даёт $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ при $\alpha > 60^\circ$ и $m_\text{ж} = \rho SL\dfrac{n(n-1)}{2n-1}(1-2\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; организаторы его не рассматривают, ответ дан по их варианту.



Первое положение: луч идёт $A \to W \to P \to A$ (отражения от стенки в точке W и от палочки в точке P); пунктир — нормаль к палочке в P

Проверка. Плотность жидкости получается больше плотности палочки: $\rho_\text{ж}/\rho = n^2/(2n-1) > 1$ при $n > 1$ — палочка, погружённая лишь частью, плавает на жидкости, так и должно быть. Предельный случай $\alpha \to 90^\circ$: $\beta \to 0$, палочка повисла вертикально, уровень стоит на $L - \ell$ ниже шарнира, $\Delta H = L - \ell$, как и даёт формула. Размерность: ρSL — масса.

Ответ. $m_\text{ж} = \rho_\text{ж}\,S\,\Delta H = \rho SL\,\dfrac{n(n-1)}{2n-1}\,(\sin\alpha - \cos\alpha)$; решение существует при $\alpha > \pi/4$.