Труба с верёвкой на наклонной плоскости

Задача 6. [МОШ 2014/15, 11 класс, задача 6] С наклонной плоскости без проскальзывания скатывается тонкостенная труба, наматывая на себя сверху лёгкую и тонкую верёвку, которую можно считать нерастяжимой. Свободный конец верёвки прикреплён к бруску, лежащему на плоскости выше трубы. Масса трубы M, масса бруска $M/2$. Ось трубы горизонтальна, свободный участок верёвки параллелен наклонной плоскости и перпендикулярен оси трубы. Плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Ускорение, с которым поступательно движется брусок вслед за трубой, равно $0{,}3g$. Чему равен коэффициент трения μ между бруском и плоскостью?

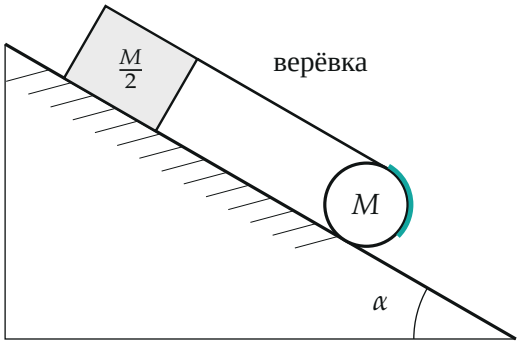


Рис. 1. Поясняющий рисунок: труба катится вниз и наматывает верёвку (бирюзовая дуга), брусок едет за ней

▲ **Решение. Что происходит.** Труба катится вниз без проскальзывания и наматывает верёвку, которая тянет брусок за собой. Верхняя точка катящейся трубы движется вдвое быстрее оси, а верёвка нерастяжима, поэтому брусок едет вдвое быстрее оси трубы. Значит, ускорение $0{,}3g$ из условия — это ускорение бруска, а ускорение оси вдвое меньше. Дальше работает энергия системы «труба + верёвка + брусок»: в неё входят только сила тяжести и трение скольжения бруска, а неизвестные силы (натяжение верёвки, трение трубы) не входят. Силами и моментами проверим ответ вторым способом.

Обозначения. R — радиус трубы, v и a — скорость и ускорение оси трубы, V и a_b — скорость и ускорение бруска, $a_b = 0{,}3g$. Ось x — вдоль плоскости вниз, y — перпендикулярно ей вверх, T — натяжение верёвки.

1. Кинематическая связь. Труба катится без проскальзывания, поэтому точка касания P в каждый момент неподвижна: это мгновенный центр скоростей, и труба вращается вокруг P с угловой скоростью $\omega = v/R$ (рис. 2). Скорость точки пропорциональна её расстоянию до P и перпендикулярна прямой до P: ось O (расстояние R) движется со скоростью v, верхняя точка Q (расстояние $2R$) — со скоростью $2v$ вдоль плоскости вниз. Свободный участок верёвки параллелен плоскости и входит на трубу в точке Q. Верёвка нерастяжима, поэтому проекции скоростей её концов на её направление равны:

$$V = 2v, \qquad a_b = 2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{a_b}{2} = 0{,}15g.$$

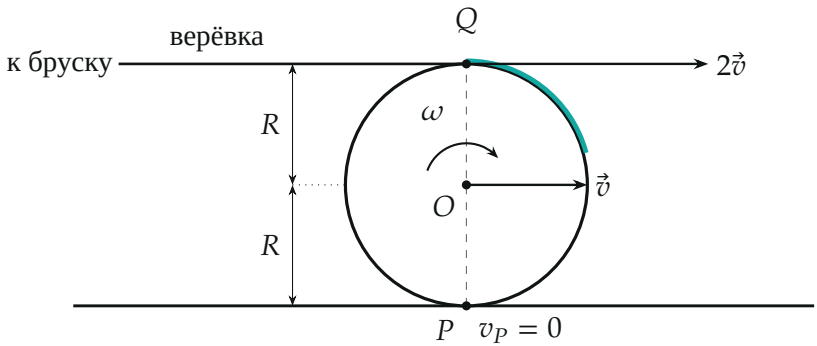


Рис. 2. Скорости точек катящейся трубы: P — мгновенный центр скоростей, $v_O = v$, $v_Q = 2v$; плоскость развёрнута горизонтально, ось x направо

Второй способ — через длину верёвки (рис. 3). Пусть ось прошла путь s. Труба повернулась на s/R и намотала ещё $R \cdot s/R = s$ верёвки, поэтому свободный участок l (от бруска до точки схода верёвки, она всё время над осью) стал короче на s. Ось ушла на s, расстояние от бруска до оси уменьшилось на s: брусок прошёл $s + s = 2s$. Те же $V = 2v$, $a_b = 2a$.

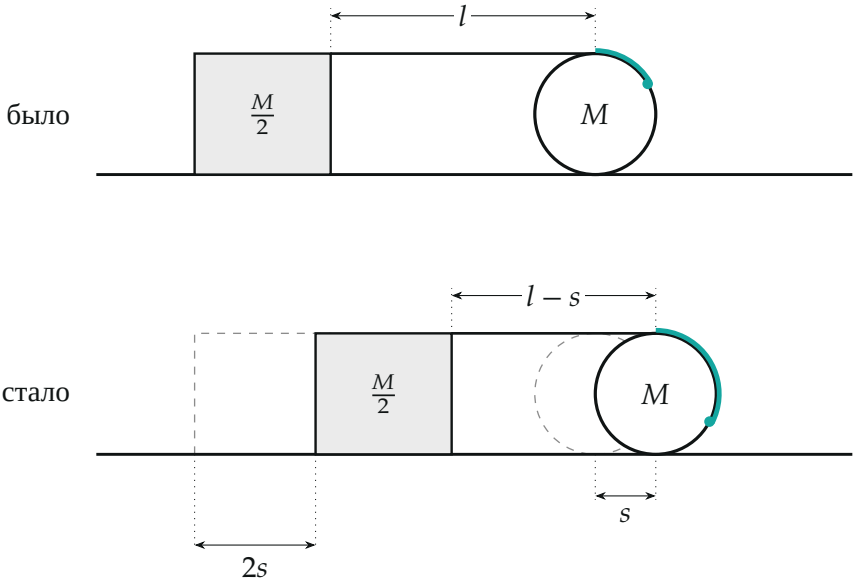


Рис. 3. Было и стало: ось трубы прошла s, брусок — $2s$; дуга намотанной верёвки (бирюзовая) выросла на s, свободный участок стал короче на s; точка — закреплённый конец верёвки

2. Закон изменения механической энергии. Возьмём систему «труба + верёвка + брусок» и промежуток, за который ось прошла путь s вниз по плоскости, а её скорость изменилась с v_1 до v_2. Брусок прошёл $2s$ (пункт 1). Какие силы совершают работу:

- сила тяжести: труба опустилась на $s\sin\alpha$, брусок на $2s\sin\alpha$; работа $Mgs\sin\alpha + \frac{M}{2}g\cdot 2s\sin\alpha = 2Mgs\sin\alpha$;
- трение скольжения бруска: $N_1 = \frac{M}{2}g\cos\alpha$ (нет ускорения вдоль оси y), $F_1 = \mu N_1$, работа $-\mu\frac{M}{2}g\cos\alpha\cdot 2s = -\mu Mgs\cos\alpha$;
- трение покоя в точке касания трубы P и реакции плоскости: точка P неподвижна, реакции перпендикулярны перемещениям, работа нулевая;
- натяжение верёвки: на брусок оно действует вдоль перемещения $2s$, работа $+T\cdot 2s$; на трубу — в точке Q, которая идёт вниз со скоростью $2v$, а сила направлена вверх, работа $-T\cdot 2s$. Сумма равна нулю: верёвка лёгкая и нерастяжимая.

Кинетическая энергия. У тонкостенной трубы вся масса лежит на расстоянии R от оси, момент инерции $I = MR^2$, значит

$$K_{\text{тр}} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{MR^2}{2}\frac{v^2}{R^2} = Mv^2,$$

а у бруска $K_{\text{бр}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}(2v)^2 = Mv^2$. Изменение полной кинетической энергии, при $v_2^2 - v_1^2 = 2as$ (равноускоренное движение):

$$\Delta K = 2M(v_2^2 - v_1^2) = 4Mas.$$

Закон изменения энергии $\Delta K = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}}$:

$$4Mas = 2Mgs\sin\alpha - \mu Mgs\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 4a = g(2\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Обратите внимание: $a = 0{,}15g$ — ускорение оси, а не бруска. Подстановка $0{,}3g$ дала бы ошибку в два раза.

3. Коэффициент трения. Подставляем $a = 0{,}15g$ и $\alpha = 30°$ ($\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$):

$$0{,}6 = 1 - \mu\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{0{,}8}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{15} \approx 0{,}46.$$

4. Проверка силами и моментами (рис. 4).

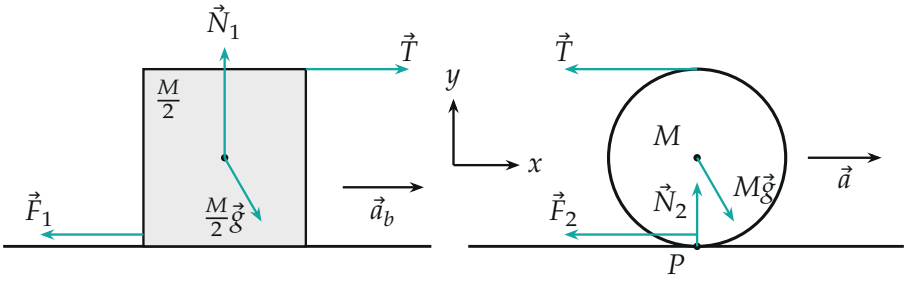


Рис. 4. Силы на брусок (слева) и на трубу (справа): T — натяжение верёвки, F_1, F_2 — трение, N_1, N_2 — реакции плоскости

Для бруска, второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$\frac{M}{2}a_b = \frac{M}{2}g\sin\alpha - \mu\frac{M}{2}g\cos\alpha + T.$$

Для трубы запишем уравнение моментов относительно оси через точку касания P (можно: центр масс трубы движется параллельно плоскости на неизменном расстоянии R от неё). Момент инерции относительно P равен $MR^2 + MR^2 = 2MR^2$, угловое ускорение a/R. Момент создают составляющая тяжести $Mg\sin\alpha$ (плечо R; $Mg\cos\alpha$ проходит через P) и натяжение T (плечо $2R$, вверх по плоскости); N_2 и F_2 приложены в P:

$$2MR\,a = Mg\sin\alpha\cdot R - T\cdot 2R \quad\Rightarrow\quad T = \frac{Mg}{2}\left(\sin\alpha - \frac{2a}{g}\right) = 0{,}1\,Mg.$$

Положительное T — верёвка натянута. Подставим T и $a_b = 0{,}3g$ в уравнение бруска:

$$0{,}15\,Mg = 0{,}25\,Mg - \mu\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,Mg + 0{,}1\,Mg \quad\Rightarrow\quad \mu = \frac{0{,}2\cdot 4}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}8}{\sqrt{3}},$$

тот же результат.

Проверка. Предел $\mu = 0$: из $4a = 2g\sin\alpha$ получаем $a_b = 2a = g\sin\alpha$ — брусок скользит свободно, верёвка не натянута ($T = 0$ в пункте 4), а труба катится одна с $\frac{1}{2}g\sin\alpha$, как и должно быть. Заданное $a_b = 0{,}3g < g\sin\alpha$: трение тормозит брусок, поэтому $\mu > 0$, и верёвка натянута. Энергия и динамика дают одно μ.

Ответ. $\mu = \dfrac{4\sqrt{3}}{15} \approx 0{,}46.$