# Цикл холодильной машины с политропами

**Задача 7.** [МОШ 2014/15, 11 класс, задача 7] Один моль идеального газа участвует в циклическом процессе $1 \to 2 \to 3 \to 1$ холодильной машины. В состоянии 1 газ имеет температуру $T_1$ и объём $V_1$. Известно, что все переходы газа из одного состояния в другое — политропические. Показатель политропы процесса $2-3$ на единицу больше показателя политропы процесса $1-2$ и на единицу меньше показателя политропы процесса $3-1$. В процессе $1-2$ объём газа уменьшается в $k$ раз. Один из процессов цикла — изотермический.

1. Определите объём газа в состоянии 3.
2. Изобразите на $pV$-диаграмме цикл, соответствующий условию задачи, указав для каждого из процессов его показатель политропы.
3. Чему может быть равна температура газа в состоянии 3?

Справка: политропическим называется процесс, в течение которого теплоёмкость газа не изменяется: $C = \text{const}$. Уравнение такого процесса имеет вид $pV^n = \text{const}$, или $p_1V_1^n = p_2V_2^n$. Величину $n$ называют показателем политропы.

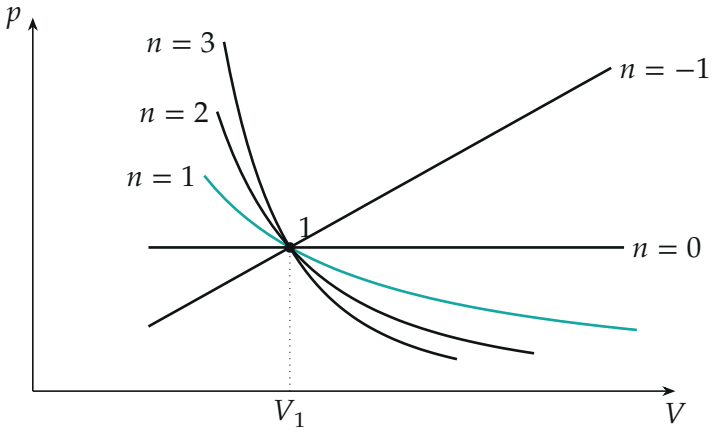



*Рис. 1. Политропы $pV^n = const$ через одну точку 1: $n = 0$ — изобара, $n = 1$ — изотерма (бирюзовая), $n = -1$ — прямая $p \propto V$; чем больше $n$, тем круче кривая*

▲ **Решение. Что происходит.** Газ проходит цикл из трёх политропных процессов, показатели которых образуют ряд $n$, $n+1$, $n+2$. Политропа $pV^n = \text{const}$ вместе с уравнением состояния даёт простую связь температуры и объёма, а замкнутость цикла (мы возвращаемся в состояние 1) связывает все объёмы и температуры. Так находится $V_3$ при любом $n$. Условие «один процесс изотермический» выбирает $n$: изотерма — это политропа с показателем 1 (рис. 1). Класс задачи: цикл из процессов с постоянной теплоёмкостью, ключевая формула — $TV^{m-1} = \text{const}$.

**Обозначения.** $n$ — показатель политропы $1 \to 2$, тогда у $2 \to 3$ он $n+1$, у $3 \to 1$ — $n+2$. $V_2 = V_1/k$, $V_3 = xV_1$ ($x$ неизвестно).

**1. Связь $T$ и $V$ вдоль политропы.** Для одного моля $pV = RT$, поэтому $p = RT/V$. Политропа $pV^m = \text{const}$ превращается в $RT\,V^{m-1} = \text{const}$, то есть

$$TV^{m-1} = \text{const}.$$

Справедливо на каждом участке цикла, пока показатель $m$ не меняется.

**2. Объём в состоянии 3.** Выразим все температуры через $T_1$ и безразмерные множители. Участок $1 \to 2$ ($m = n$, значит $TV^{n-1} = \text{const}$; $V_1/V_2 = k$):

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} = T_1 k^{n-1}.$$

Участок $2 \to 3$ ($m = n+1$, значит $TV^n = \text{const}$; $V_2/V_3 = 1/(kx)$):

$$T_3 = T_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{n} = T_1 k^{n-1}\,\frac{1}{(kx)^n} = \frac{T_1}{k\,x^n}.$$

Участок $3 \to 1$ ($m = n+2$, значит $TV^{n+1} = \text{const}$; $V_1/V_3 = 1/x$):

$$T_1 = T_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{T_1}{x^{n+1}}.$$

Приравниваем два выражения для $T_3$: $\dfrac{1}{k\,x^n} = \dfrac{1}{x^{n+1}}$, отсюда $x = k$, то есть

$$V_3 = kV_1, \qquad T_3 = \frac{T_1}{k^{n+1}}.$$

Показатель $n$ из ответа выпал: объём $V_3$ не зависит от того, какой именно процесс изотермический.

Второй способ — в логарифмах. Возьмём $\ln T$ и $\ln V$: из $TV^{m-1} = \text{const}$ следует $\ln T = -(m-1)\ln V + \text{const}$, то есть каждая политропа — прямая с наклоном $1-m$ (рис. 2). За цикл $\ln T$ возвращается к начальному значению, а $\ln V$ меняется на $-\ln k$, на $\ln k + \ln x$ и на $-\ln x$ (участки $1 \to 2 \to 3 \to 1$):

$$(1-n)(-\ln k) + (-n)(\ln k + \ln x) + (-n-1)(-\ln x) = \ln x - \ln k = 0,$$

откуда снова $x = k$.

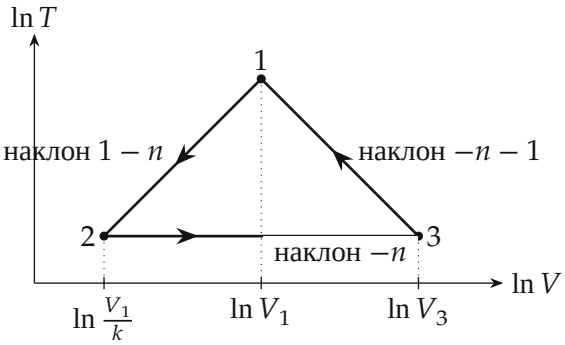



*Рис. 2. Цикл в осях* $\ln V, \ln T$ *(нарисован для* $n = 0$*): три отрезка с наклонами* $1-n, -n, -n-1$ *замыкаются, только если* $V_3 = kV_1$

**3. Какой процесс — изотерма, и три цикла.** На изотерме $T = \text{const}$ при меняющемся объёме. В $TV^{m-1} = \text{const}$ это возможно, только если $m = 1$, а объём на каждом из трёх участков меняется ($V_1 \to V_1/k \to kV_1 \to V_1$). Значит, один из показателей $n$, $n+1$, $n+2$ равен единице:

$$n = 1, \quad n = 0, \quad n = -1.$$

Каждому $n$ отвечает свой цикл (рис. 3). Температура $T_3 = T_1/k^{n+1}$ из пункта 2 даёт для них

$$T_3 = \frac{T_1}{k^2}, \qquad T_3 = \frac{T_1}{k}, \qquad T_3 = T_1.$$

Изотермой является процесс $1 \to 2$ в первом цикле, $2 \to 3$ во втором и $3 \to 1$ в третьем; в последнем случае $T_3 = T_1$ получается и без формул, потому что состояния 3 и 1 лежат на одной изотерме.

**4. Диаграммы $pV$.** Давления в вершинах найдём из $pV^m = \text{const}$ на каждом участке, начиная с $p_1$:

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n = p_1 k^n,$$

$$p_3 = p_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{n+1} = p_1 k^n\, k^{-2(n+1)} = p_1 k^{-n-2}.$$

Три цикла (в вершинах $(V,p)$: 1 — $(V_1,\, p_1)$, 2 — $(V_1/k,\ k^n p_1)$, 3 — $(kV_1,\ k^{-n-2}p_1)$):

| $n$ | показатели $1\to2,\ 2\to3,\ 3\to1$ | $p_2,\ p_3$ | $T_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1, 2, 3 | $kp_1,\ p_1/k^3$ | $T_1/k^2$ |
| 0 | 0, 1, 2 | $p_1,\ p_1/k^2$ | $T_1/k$ |
| $-1$ | $-1$, 0, 1 | $p_1/k,\ p_1/k$ | $T_1$ |

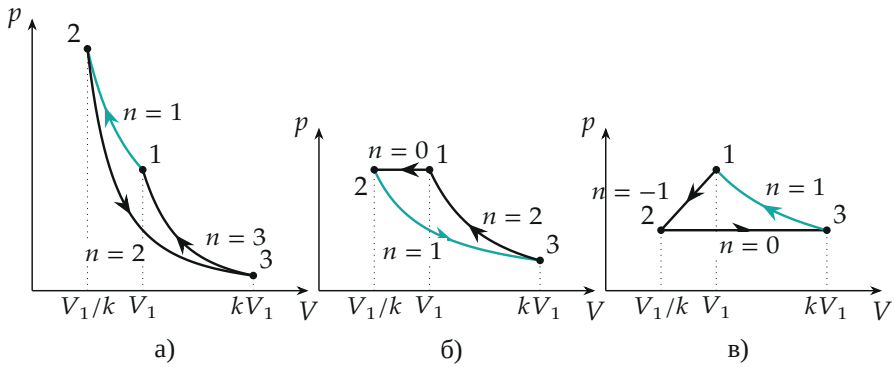



*Рис. 3. Три возможных цикла (построены для $k = 2$): а) $n = 1$, б) $n = 0$, в) $n = -1$; изотермический процесс — бирюзовый, числа у кривых — показатели политроп; стрелки задают обход $1 \to 2 \to 3 \to 1$*

Обратите внимание: все три цикла обходятся против часовой стрелки — работа газа за цикл отрицательна (для $k = 2$ она равна $-0{,}32RT_1$,

$-0{,}31RT_1$, $-0{,}32RT_1$; при любом $k > 1$ знак тот же), то есть это действительно холодильная машина. Объём $V_3$ у всех троих один и тот же, различаются температура $T_3$ и давления.

**Проверка.** Размерность: $V_3$ и $T_3$ имеют правильные единицы, $k$ безразмерно. Предел $k \to 1$: объём почти не меняется, $V_3 \to V_1$, $T_3 \to T_1$ при любом $n$. Давления замыкают цикл: например, при $n = 1$ на участке $3 \to 1$ ($pV^3 = \text{const}$) $p_3(kV_1)^3 = \frac{p_1}{k^3}k^3V_1^3 = p_1V_1^3$ — совпало с состоянием 1. Два способа дали $V_3 = kV_1$.

**Ответ.** 1) $V_3 = kV_1$; 2) три возможных цикла показаны на рис. 3: при $n_{12} = 1$, $n_{23} = 2$, $n_{31} = 3$ (изотерма $1 \to 2$), при $n_{12} = 0$, $n_{23} = 1$, $n_{31} = 2$ (изотерма $2 \to 3$) и при $n_{12} = -1$, $n_{23} = 0$, $n_{31} = 1$ (изотерма $3 \to 1$); 3) $T_3 = T_1/k^2$, $T_3 = T_1/k$ или $T_3 = T_1$ (в том же порядке).