Ёмкость сложной цепочки конденсаторов

Задача 8. [МОШ 2014/15, 11 класс, задача 8] Найдите электрическую ёмкость участка AB цепи, схема которого приведена на рисунке. Ёмкости конденсаторов указаны на схеме в мкФ, ёмкостью соединительных проводов можно пренебречь. Провода соединены только в местах, обозначенных точками.

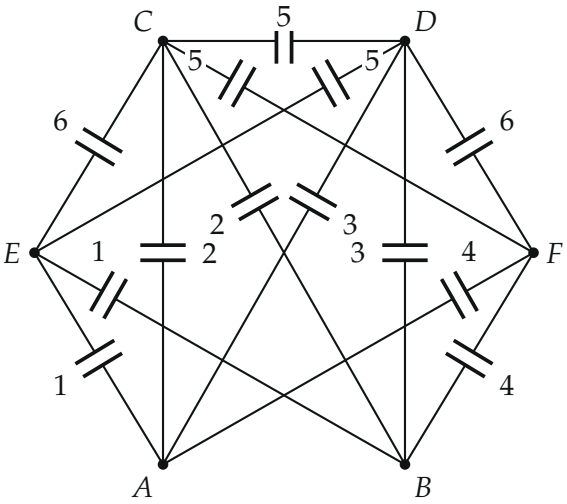


Рис. 1. Схема участка AB: числа — ёмкости в мкФ, провода соединены только в точках; C, D, E, F — четыре «средних» узла (введены для разбора)

▲ **Решение. Что происходит.** Подключим к точкам A и B источник напряжения U: тогда ёмкость участка $C_{AB} = q/U$, где q — заряд, который источник перегнал на конденсаторы, присоединённые к A. Схема из тринадцати конденсаторов выглядит неприступно, но в ней есть скрытая симметрия: каждый из четырёх «средних» узлов C, D, E, F соединён и с A, и с B конденсаторами одинаковой ёмкости. Поэтому эти четыре узла будут на одном потенциале, конденсаторы между ними останутся незаряженными, и их можно выбросить. Класс задачи: узлы с одинаковым потенциалом.

Обозначения. Потенциал B примем за нуль, потенциал A равен U. Ёмкости — в мкФ. Читаем схему:

- от A: к C — 2, к E — 1, к D — 3, к F — 4;
- от B: к C — 2, к E — 1, к D — 3, к F — 4;
- между средними узлами: C–D — 5, C–F — 5, D–E — 5, C–E — 6, D–F — 6.

1. Потенциалы средних узлов. Узел C — изолированный проводник: до подключения источника все конденсаторы не заряжены, поэтому суммарный заряд обкладок, присоединённых к узлу, остаётся нулевым. Заряд обкладки конденсатора, присоединённой к узлу X, равен $C_{XY}(\varphi_X - \varphi_Y)$, где Y — узел на другом конце конденсатора. Предположим, что все четыре средних узла имеют один потенциал φ_0. Тогда конденсаторы между ними не заряжены (напряжение нулевое), и условие нулевого заряда узла C принимает вид

$$2(\varphi_0 - U) + 2(\varphi_0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{U}{2}.$$

Для E получаем $1 \cdot (\varphi_0 - U) + 1 \cdot \varphi_0 = 0$, для D — $3(\varphi_0 - U) + 3\varphi_0 = 0$, для F — $4(\varphi_0 - U) + 4\varphi_0 = 0$: все четыре условия дают одно и то же $\varphi_0 = U/2$. Значит, такое распределение потенциалов удовлетворяет всем уравнениям (сохранение заряда на всех узлах и заданные U и 0 на A и B). Решение электростатической задачи единственно, поэтому оно и есть настоящее.

Обратите внимание: одинаковость потенциалов следует не из геометрической симметрии рисунка (её нет), а из того, что у каждого среднего узла ёмкости к A и к B равны. Конденсаторы 5 и 6 мкФ заряда не несут и на ответ не влияют.

2. Эквивалентная схема. Объединим средние узлы в один — точку O с потенциалом $U/2$ (рис. 2). Между A и O стоят четыре конденсатора параллельно, их ёмкости складываются:

$$C_{AO} = 2 + 1 + 3 + 4 = 10 \text{ мкФ}, \qquad C_{OB} = 2 + 1 + 3 + 4 = 10 \text{ мкФ}.$$

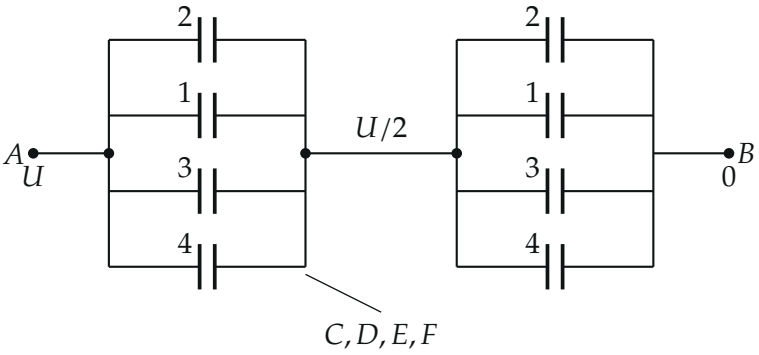


Рис. 2. Эквивалентная схема: средние узлы C, D, E, F на одном потенциале $U/2$ объединены; конденсаторы 5 и 6 мкФ между ними убраны

3. Ёмкость участка. Два конденсатора C_{AO} и C_{OB} стоят последовательно (рис. 3):

$$C_{AB} = \frac{C_{AO}\,C_{OB}}{C_{AO}+C_{OB}} = \frac{10\cdot 10}{10+10}\ \text{мкФ} = 5\ \text{мкФ}.$$

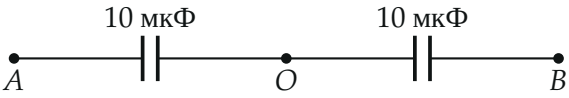


Рис. 3. После сложения параллельных конденсаторов остаются два по 10 мкФ последовательно

То же через заряд: к обкладкам, присоединённым к A, подведён заряд $q = (2{+}1{+}3{+}4)\left(U - \dfrac{U}{2}\right) = 5U$ (мкФ·В), откуда $C_{AB} = q/U = 5$ мкФ.

Проверка. Ёмкость цепи из двух последовательных участков меньше каждого из них: $5 < 10$. Второй способ — без предположения о равенстве потенциалов: условия нулевого заряда для четырёх средних узлов (система четырёх линейных уравнений с ёмкостями из схемы, решена на python) дали $\varphi_C = \varphi_D = \varphi_E = \varphi_F = U/2$ и $C_{AB} = 5$ мкФ. Смысл: ничего не изменится, если средние узлы замкнуть проводом, и схема из тринадцати конденсаторов сводится к двум по 10 мкФ.

Ответ. $C_{AB} = 5$ мкФ.