Шарнирная цепочка с пружинами

Задача 9. [МОШ 2014/15, 11 класс, задача 9] Шарнирная конструкция состоит из очень большого числа N периодически повторяющихся одинаковых звеньев (см. рис.). Каждое звено включает в себя пружину, концы которой прикреплены к серединам двух пар скрещенных реек, два сферических шарнирных блока и четыре половинки самих реек. Шарнирные блоки дают возможность рейкам свободно вращаться в пространстве. Жёсткость каждой из пружин равна k, масса каждого из шарнирных блоков равна m, все остальные элементы невесомы, трения нигде нет. Когда пружины не деформированы, рейки образуют между собой угол α. Концы этой конструкции соединили между собой, образовав большое кольцо, так, что пружины расположились вокруг цилиндрической поверхности. Получившаяся система колеблется таким образом, что в каждый момент времени все пружины сжаты или растянуты одинаково. Найдите период этих колебаний вокруг положения равновесия, считая их малыми. Система находится в невесомости.

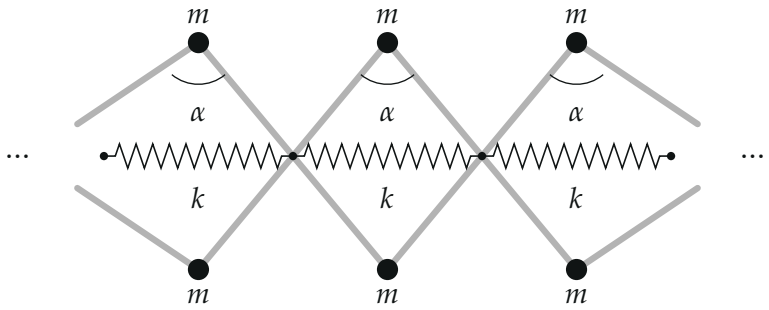


Рис. 1. Три звена конструкции (до замыкания в кольцо): шарнирные блоки m сверху и снизу, пружина k между точками пересечения реек, угол α между рейками при недеформированной пружине

▲ **Решение. Что происходит.** Конструкцию замкнули в кольцо: пружины лежат хордами на цилиндрической поверхности, шарнирные блоки (шарики) расположены над и под серединами пружин вдоль оси цилиндра. Все пружины деформируются одинаково, поэтому у системы одна

степень свободы — длина пружины s. Когда пружины растягиваются, длина кольца Ns растёт, и кольцо расширяется: $2N$ шариков движутся от оси кольца. При огромном N радиус кольца $R = Ns/2\pi$ меняется в N раз быстрее, чем s, так что шарики летят радиально со скоростью порядка $N\dot{s}$, а вдоль оси цилиндра их скорость порядка $\dot{s}$. Поэтому осевая часть кинетической энергии мала (порядка $1/N^2$) и ею можно пренебречь. Остаётся энергия: кинетическая — радиальное движение шариков, потенциальная — пружин; это осциллятор.

Обозначения. s — текущая длина пружины, s_0 — длина недеформированной, $x = s - s_0$. r — длина половинки рейки от шарика до пересечения реек, h — расстояние шарика от плоскости кольца (по оси цилиндра), R — радиус кольца (цилиндра).

1. Звено. Шарик, два пересечения реек (концы одной пружины) и второй шарик образуют ромб со стороной r (рис. 2б). Диагонали ромба — пружина длиной s и расстояние между шариками $2h$; диагонали перпендикулярны и делят друг друга пополам:

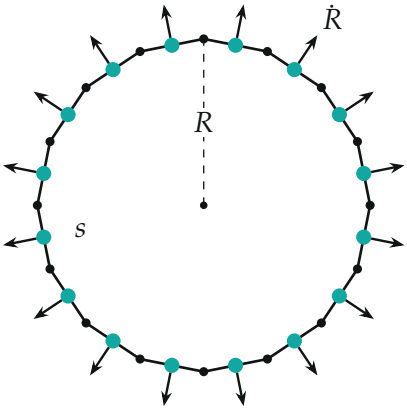
$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2 = r^2.$$

Длина рейки r постоянна; угол α даёт $s_0 = 2r\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

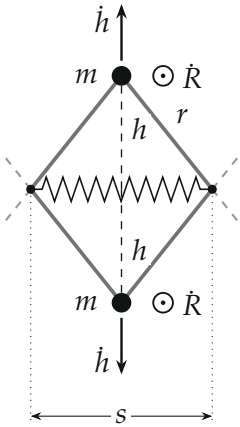
2. Кольцо. Концы пружин лежат на окружности радиуса R (рис. 2а), пружина — хорда, стягивающая дугу $2\pi/N$:

$$s = 2R\sin\frac{\pi}{N} \approx \frac{2\pi R}{N} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{Ns}{2\pi}.$$

Применимо при $N \gg 1$ (хорда почти равна дуге). Шарики расположены над и под серединами хорд, то есть на расстоянии $R\cos\frac{\pi}{N} \approx R$ от оси: отличие порядка $1/N^2$, и дальше шарики считаем лежащими на окружности радиуса R.



а)



б)

Рис. 2. а) Вид сверху: N пружин-хорд (на рисунке 16) образуют кольцо радиуса R, шарики — над и под серединами хорд, их радиальная скорость $\dot{R}$. б) Звено сбоку: ромб с диагоналями s и $2h$; $\dot{h}$ — осевая скорость шариков, значок $\odot$ — радиальная скорость $\dot{R}$ направлена на нас

3. Связь скоростей шарика. Продифференцируем по времени. Радиальная составляющая скорости шарика (от оси кольца) и осевая (вдоль оси цилиндра, из пункта 1: $2h\dot{h} = -s\dot{s}/2$):

$$\dot{R} = \frac{N}{2\pi}\,\dot{s}, \qquad \dot{h} = -\frac{s}{4h}\,\dot{s}.$$

Отношение $\dot{h}/\dot{R} = -\dfrac{s}{4h}\cdot\dfrac{2\pi}{N}$ — порядка $1/N$: осевой скоростью по сравнению с радиальной можно пренебречь, в кинетической энергии она даёт поправку порядка $1/N^2$. Поэтому от угла α ответ не зависит.

4. Кинетическая энергия. В кольце $2N$ шариков массой m (по два в звене), каждый движется радиально со скоростью $\dot{R}$:

$$K = 2N\cdot\frac{m\dot{R}^2}{2} = Nm\,\frac{N^2\dot{s}^2}{4\pi^2} = \frac{N^3 m}{4\pi^2}\,\dot{x}^2,$$

где $\dot{s} = \dot{x}$ (s_0 постоянна).

5. Потенциальная энергия. В невесомости без трения энергия запасена только в N пружинах: $U = N \cdot \dfrac{kx^2}{2}$. Равновесие — недеформированные пружины ($x = 0$).

6. Колебания. Полная энергия сохраняется:

$$\frac{N^3 m}{4\pi^2}\,\dot{x}^2 + \frac{Nk}{2}\,x^2 = \text{const}.$$

Сравним с энергией осциллятора $\dfrac{M_*\dot{x}^2}{2} + \dfrac{k_* x^2}{2}$: эффективная масса $M_* = \dfrac{N^3 m}{2\pi^2}$, жёсткость $k_* = Nk$. Эффективная масса постоянна (колебания малые, поправка осевой части, зависящая от x, отброшена), поэтому колебания гармонические с $\omega^2 = k_*/M_*$:

$$\omega^2 = \frac{Nk \cdot 2\pi^2}{N^3 m} = \frac{2\pi^2}{N^2}\,\frac{k}{m}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = N\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Обратите внимание: период растёт как N, потому что при изменении длины пружины на Δs шарик проходит путь $N\,\Delta s/2\pi$: кинетическая энергия цепочки растёт как N^3, а энергия пружин — как N.

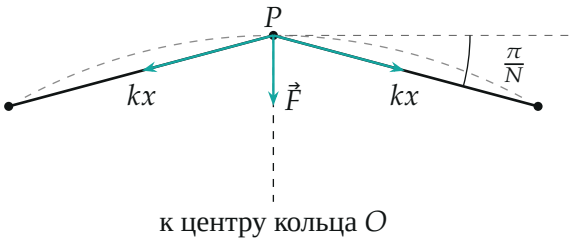


Рис. 3. Узел P (точка пересечения реек) и две соседние пружины-хорды (угол между хордами преувеличен): силы kx направлены вдоль пружин, их сумма $\vec{F}$ — к центру кольца O, $F = 2kx\sin\frac{\pi}{N}$

Проверка силами (рис. 3). Растянутые пружины тянут каждую из N точек пересечения реек к центру кольца: две пружины с силой kx под углом $2\pi/N$ дают результирующую $2kx\sin\frac{\pi}{N} \approx 2\pi kx/N$. Рейки и

шарниры невесомы, поэтому по принципу виртуальных перемещений при общем малом смещении δR работа этих сил равна работе сил инерции $2N$ шариков: $2Nm\ddot{R} = -N \cdot \dfrac{2\pi kx}{N} = -2\pi kx$. С $\ddot{R} = \dfrac{N}{2\pi}\ddot{x}$ получаем $\ddot{x} = -\dfrac{2\pi^2}{N^2}\dfrac{k}{m}x$ — то же ω^2. Размерность: $\sqrt{m/k}$ — секунды; при $k \to \infty$ $T \to 0$. Поправка за счёт осевой скорости шариков — множитель $\sqrt{1 + (s_0/4h)^2(2\pi/N)^2}$, при $N = 100$, $\alpha = 60^\circ$ он отличается от единицы на $\approx 2 \cdot 10^{-4}$.

Ответ. $T = N\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$.