Видимая толщина канала в ручке

Задача 10. [МОШ 2014/15, 11 класс, задача 10] Внутри прозрачного шестигранного корпуса шариковой ручки имеется круглый канал, заполненный чернилами. При рассматривании тёмного канала через прозрачный корпус было отмечено, что вращение корпуса вокруг его оси симметрии приводит к изменению видимой толщины канала с чернилами. Ширина видимой тёмной полосы максимальна, когда ближайшее ребро шестигранника, ось симметрии ручки и глаз наблюдателя лежат в одной плоскости. Отношение максимальной видимой толщины канала к его минимальной видимой толщине при неизменном расстоянии от ручки до глаза (которое во много раз больше толщины ручки) равно двум. Отношение диаметра d канала к длине L стороны шестигранника равно $d/L = \sqrt{3}/4$. Найдите показатель преломления n материала, из которого сделан корпус.

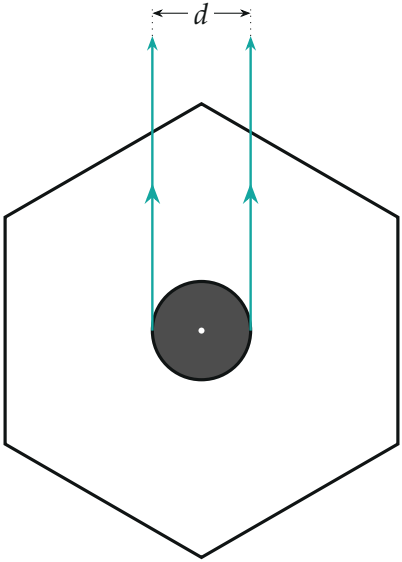


Рис. 1. Поясняющий рисунок (сечение ручки): глаз смотрит вдоль нормали к одной грани, лучи идут от канала к глазу без преломления, видимая толщина равна d (минимальная)

▲ **Решение. Что происходит.** Глаз очень далеко, поэтому лучи, которые приходят от канала к глазу, в воздухе параллельны. Видимая толщина тёмной полосы — это ширина пучка таких параллельных лучей, перекрытых каналом, то есть расстояние между двумя крайними лучами. Внутри корпуса крайние лучи касаются канала. Через одну грань лучи идут без искажения, и толщина равна d. Когда глаз смотрит вдоль ребра, лучи входят в две соседние грани под углом и преломляются, и пучок становится шире; отношение ширин, равное двум, определяет, насколько сильно, а значит — показатель преломления. Ключевой закон — закон преломления на грани; геометрия — сечение шестигранника.

Обозначения. Сечение корпуса — правильный шестиугольник со стороной L и центром O на оси ручки. $\rho = d/2$ — радиус канала, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ — расстояние от O до грани (высота правильного треугольника со стороной L). Из $d/L = \sqrt{3}/4$ следует $d = \frac{\sqrt{3}}{4}L = \frac{a}{2}$, то есть $a = 2d$, $\rho = \frac{a}{4}$.

1. Минимальная толщина. Если канал виден через одну грань и глаз смотрит вдоль нормали к ней, лучи падают на грань под углом $0°$ и не преломляются (рис. 1). Крайние лучи — две касательные к каналу, параллельные направлению взгляда, и расстояние между ними равно d. Это и есть минимальная видимая толщина.

2. Максимальная толщина и точка падения крайнего луча. По условию максимальная толщина вдвое больше: $2d$, и крайний луч (вертикальный в воздухе) отстоит от оси на $d = a/2$ (рис. 2). Ребро шестиугольника на оси симметрии, правая грань идёт от ребра на расстояние a по горизонтали — её середина лежит на расстоянии $a/2$ от оси. Значит, крайний луч попадает на грань именно в её середину M. Середина грани — основание перпендикуляра OM к грани, $OM = a$.

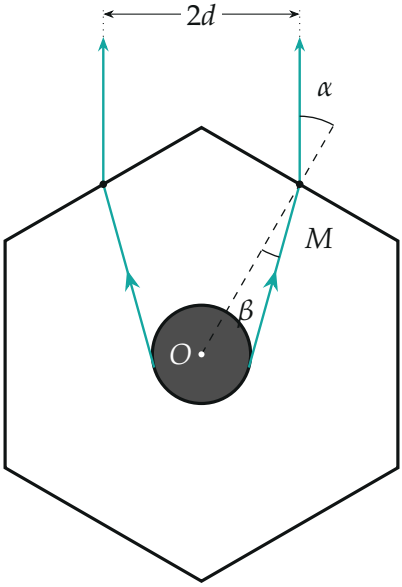


Рис. 2. Глаз смотрит вдоль ребра (вертикальные лучи): крайние лучи падают на середины двух соседних граней и внутри корпуса касаются канала; α — угол падения, β — угол преломления; ширина полосы $2d$

3. Угол падения. Нормаль к грани в точке M направлена вдоль OM. Нормали соседних граней правильного шестиугольника образуют угол 60° и расположены симметрично относительно плоскости, проходящей через ребро и ось, то есть относительно направления взгляда. Значит, нормаль составляет с лучом угол 30°:

$$\alpha = 30^\circ, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

4. Угол преломления. В точке M луч преломляется и идёт внутри корпуса под углом β к нормали MO. Он крайний, поэтому касается канала в точке K, а радиус OK перпендикулярен касательной. Треугольник OKM прямоугольный (рис. 3): $OM = a$, $OK = \rho$:

$$\sin\beta = \frac{OK}{OM} = \frac{\rho}{a} = \frac{1}{4}.$$

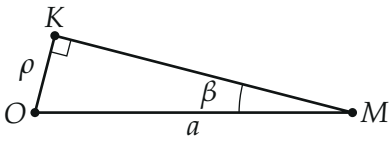


Рис. 3. Прямоугольный треугольник OKM: $OM = a$, $OK = \rho$, β — угол между лучом внутри корпуса и нормалью MO

Обратите внимание: a — расстояние от оси до грани, оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}L$, а не L. И внутри корпуса крайний луч — касательная к каналу, а не прямая, идущая к оси.

5. Закон преломления на грани. Свет идёт из воздуха ($n_в = 1$) в материал корпуса:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1/2}{1/4} = 2.$$

Проверка. Показатель безразмерен и больше единицы, $\beta < \alpha$, как и должно быть при переходе в более плотную среду. Второй способ — прямой счёт хода лучей (python): при $n = 2$ параллельный пучок через ребро перекрывается каналом на ширине $a = 2d = 0{,}866L$, то есть вдвое больше d, как в условии; при другом n (например, $\sqrt{2}$) отношение выходит другим ($\approx 1{,}6$). Смысл: чем сильнее преломление, тем сильнее лучи прижимаются к нормали, тем ближе к середине грани проходит крайний луч, и толщина полосы вдоль ребра растёт.

Ответ. $n = 2$.