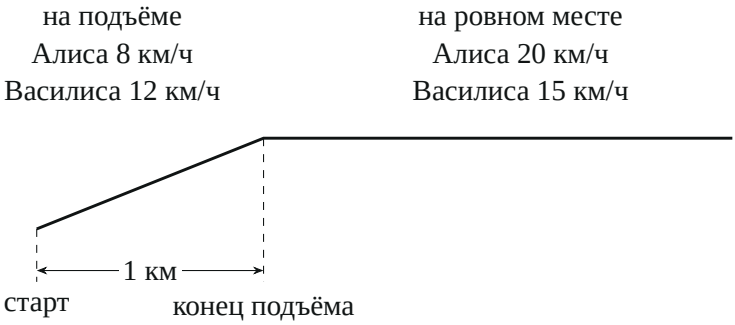
Лыжницы в погоне

Задача 1. [МОШ 2014/15, 7 класс, задача 1] Школьницы Алиса и Василиса участвуют в лыжных гонках. Сразу после старта лыжницам пришлось подниматься в горку. Алиса, скорость которой на подъёме составляла 8 км/ч, отстала от Василисы, поднимавшейся со скоростью 12 км/ч. Спустя километр подъём закончился, и Алиса со скоростью 20 км/ч устремилась в погоню за Василисой, двигавшейся со скоростью 15 км/ч. Какое расстояние надо будет пройти Алисе по горизонтальной лыжной трассе, чтобы догнать Василису?



Поясняющий рисунок: километровый подъём и дальше ровная трасса; на каждом участке скорости лыжниц свои.

▲ **Решение. Что происходит.** Обе лыжницы движутся равномерно, но скорость у каждой меняется скачком в момент выхода на ровное место. Поэтому подъём делает Василису лидером: на километре она тратит меньше времени. Когда Алиса сама выходит на ровное место, Василиса уже убежала вперёд. Дальше это задача на сближение: расстояние между лыжницами сокращается с одной постоянной скоростью, и надо найти, за какое время оно обнулится.

Обозначения. $v_{A1} = 8$ км/ч, $v_{B1} = 12$ км/ч — скорости на подъёме; $v_{A2} = 20$ км/ч, $v_{B2} = 15$ км/ч — на ровном месте; $\ell = 1$ км — длина подъёма; t_A, t_B — времена подъёма; s_0 — отрыв Василисы в момент, когда Алиса выходит на ровное место; t — время погони; S — искомый путь Алисы по ровному месту.

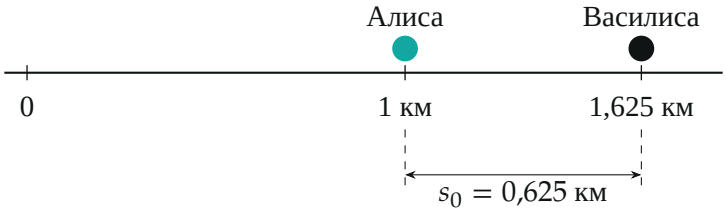
1. Времена подъёма. Движение равномерное, поэтому время равно пути, делённому на скорость:

$$t_\text{A} = \frac{\ell}{v_\text{A1}} = \frac{1}{8}\text{ ч} = 7{,}5\text{ мин}, \qquad t_\text{B} = \frac{\ell}{v_\text{B1}} = \frac{1}{12}\text{ ч} = 5\text{ мин}.$$

Василиса вышла на ровное место на $t_\text{A} - t_\text{B} = \dfrac{1}{24}$ ч раньше Алисы.

2. Отрыв в момент выхода Алисы на ровное место. Эти $\frac{1}{24}$ ч Василиса уже бежала по ровному месту со скоростью v_B2. Алиса в этот момент ещё на вершине подъёма, и расстояние между ними равно пути Василисы:

$$s_0 = v_\text{B2}\,(t_\text{A} - t_\text{B}) = 15 \cdot \frac{1}{24}\text{ км} = 0{,}625\text{ км}.$$



Момент, когда Алиса выходит на ровное место (отсчёт пути — от старта). Василиса на $s_0 = 0{,}625$ км впереди.

3. Скорость сближения. Обе лыжницы бегут в одну сторону. За каждый час Алиса проходит на v_A2, Василиса — на v_B2, поэтому расстояние между ними сокращается со скоростью

$$v_\text{сбл} = v_\text{A2} - v_\text{B2} = 20 - 15 = 5\text{ км/ч}.$$

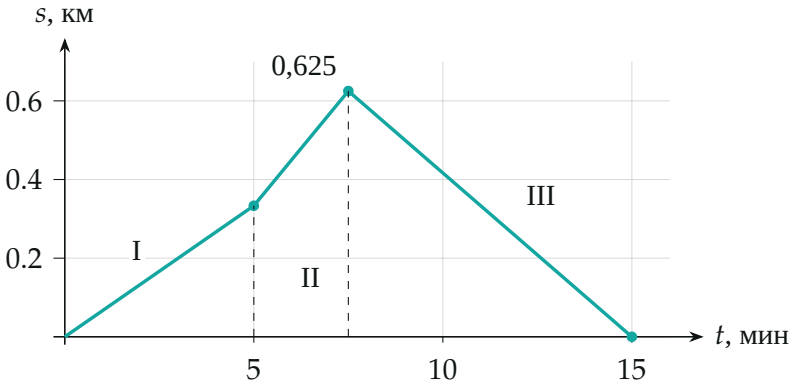
4. Время и путь погони. Алиса догонит Василису, когда сократит отрыв s_0 до нуля:

$$t = \frac{s_0}{v_\text{сбл}} = \frac{0{,}625}{5}\text{ ч} = 0{,}125\text{ ч} = 7{,}5\text{ мин}.$$

Всё это время Алиса бежит по ровному месту со скоростью v_{A2}:

$$S = v_{A2}\,t = 20 \cdot 0{,}125 \text{ км} = 2{,}5 \text{ км}.$$

Общая формула: $S = \dfrac{v_{A2}\,v_{B2}\,(t_A - t_B)}{v_{A2} - v_{B2}}$.



Расстояние s между лыжницами (Василиса впереди). I — обе на подъёме: отрыв растёт на $12 - 8 = 4$ км/ч; II — Василиса уже на ровном месте, Алиса ещё на подъёме: отрыв растёт на $15 - 8 = 7$ км/ч; III — обе на ровном месте: отрыв тает на 5 км/ч. График доходит до нуля в момент 15 мин.

Обратите внимание. Расстояние в 1 км подъёма не входит в ответ: спрашивают путь только по горизонтальной трассе. Алиса догонит Василису в точке, которая лежит в $1 + 2{,}5 = 3{,}5$ км от старта.

Проверка. Единицы: км/ч · ч = км. Второй способ — сверка моментов: до места встречи Алиса бежит $\frac{1}{8} + \frac{2{,}5}{20} = 0{,}25$ ч, Василиса — $\frac{1}{12} + \frac{2{,}5}{15} = 0{,}25$ ч; времена от старта совпали, значит, встреча возможна именно в этой точке. На графике то же: пик отрыва 0,625 км в 7,5 мин, спад $0{,}625/5 = 0{,}125$ ч, обнуление в $7{,}5 + 7{,}5 = 15$ мин.

Смысл такой: Василиса выигрывает на подъёме 0,625 км, а Алиса возвращает их со скоростью 5 км/ч, поэтому отыгрывает за 7,5 мин.

Ответ. $S = 2{,}5$ км.