Стробоскоп и шарики на ленте

Задача 2. [МОШ 2014/15, 7 класс, задача 2] Стробоскоп представляет собой диск с небольшим отверстием в центре и механизмом подсветки. В момент, когда подсветка включается на короткий промежуток времени, можно увидеть предмет, находящийся позади отверстия. За стробоскопом на движущейся ленте установлены шарики, расположенные на одинаковом расстоянии 10 см друг от друга. Найдите все возможные скорости ленты, при которых каждый шарик можно наблюдать в отверстие. Частота мигания подсветки — 1 раз за 0,5 с.

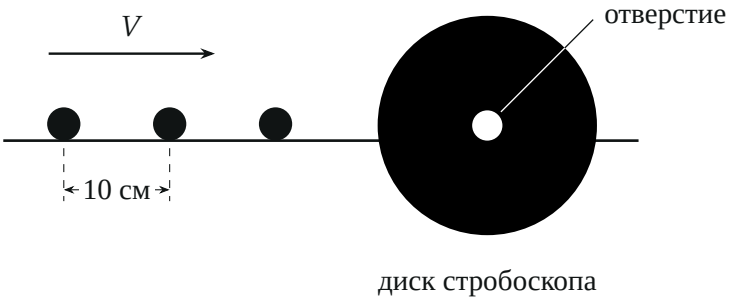


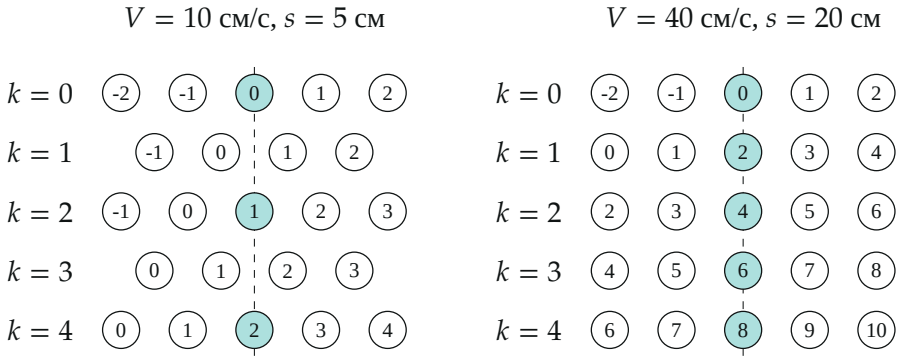
Схема: за диском стробоскопа по ленте едут шарики; смотрят сквозь отверстие.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Шарик виден, только если в момент вспышки он ровно напротив отверстия. Между двумя вспышками проходит $T = 0{,}5$ с, и лента за это время сдвигается каждый раз на одно и то же расстояние $s = VT$. Значит, после k вспышек лента сдвинута на ks, и шарик виден, если этот сдвиг равен целому числу расстояний между шариками. В остальные вспышки отверстие видит пустое место между шариками. Задача — найти, при каком s в отверстии за какое-то время побывают *все* шарики подряд, и ни один не пропустится.

Обозначения. $l = 10$ см — расстояние между соседними шариками; $T = 0{,}5$ с — время между вспышками; V — скорость ленты; $s = VT$ — сдвиг ленты между соседними вспышками; k — номер вспышки. Шарики пронумерованы вдоль ленты: $0, 1, 2, \ldots$; в нулевую вспышку напротив

отверстия шарик 0 (фазу мигания и положение шариков считаем такими, что какой-то шарик у отверстия в момент вспышки есть).

1. Что видно в k-ю вспышку. Лента движется равномерно, за k интервалов она сдвигается на ks. Напротив отверстия оказывается шарик с номером $m = ks/l$, если это число целое; если нет — отверстие приходится на промежуток между шариками, и ничего не видно.



Лента в моменты вспышек $k = 0, 1, 2, \ldots$ (шарики пронумерованы, пунктир — линия отверстия, выделен шарик напротив него). Слева $s = 5$ см: шарик виден каждую вторую вспышку, и это $0, 1, 2, \ldots$ подряд. Справа $s = 20$ см: шарик виден каждую вспышку, но видны только $0, 2, 4, \ldots$, нечётные пропущены.

2. Условие «видны все шарики». Пусть k_0 — номер первой после нулевой вспышки, в которую у отверстия снова шарик, и $k_0 s = pl$ с целым $p \geq 1$. Если во вспышки k и k' у отверстия шарики, то и во вспышку $k - k'$ тоже (сдвиг на целое число l можно вычитать), поэтому вспышки с шариком — это ровно $k_0, 2k_0, 3k_0, \ldots$, а видны шарики $0, p, 2p, \ldots$ Чтобы не пропал ни один, нужно $p = 1$:

$$k_0 s = l \quad \Rightarrow \quad s = \frac{l}{n}, \qquad n = k_0 = 1, 2, 3, \ldots$$

Здесь n — число вспышек между появлениями соседних шариков. При $s = l/n$ в промежуточные вспышки $k < n$ сдвиг kl/n не равен целому числу l, значит, там пусто, а во вспышку n у отверстия оказывается шарик 1, потом 2 и так далее — виден каждый.

3. Скорость. Подставим $s = VT$:

$$V = \frac{s}{T} = \frac{l}{nT} = \frac{10\text{ см}}{n \cdot 0{,}5\text{ с}} = \frac{20}{n}\text{ см/с}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Наибольшая скорость — 20 см/с ($n = 1$): за интервал между вспышками лента проходит ровно один шаг l, и в каждую вспышку виден следующий шарик. Остальные скорости: 10, 6,7, 5, 4, … см/с — чем меньше скорость, тем реже мелькают шарики в отверстии.



Допустимые скорости ленты: точки $20/n$ см/с ($n = 1, 2, 3, \ldots$) сгущаются к нулю. Остальные скорости, например 40 или 15 см/с, не подходят.

Обратите внимание. Вопрос не «когда в отверстии что-то видно», а «когда видны *все* шарики». При $V = 40$ см/с (и вообще при $s = kl, k \geq 2$) отверстие в каждую вспышку видит шарик, но через один: пропускаются шарики $1, 3, 5, \ldots$ Такие скорости не подходят.

Проверка. Единицы: см/с. Предельный случай $V = 20$ см/с: за $T = 0{,}5$ с лента проходит 10 см $= l$ — следующий шарик у отверстия, как и должно быть. Случай $V = 10$ см/с: сдвиг 5 см $= l/2$, шарик виден через вспышку, что совпадает с левой частью рисунка.

Смысл такой: подходят все скорости, при которых ленте нужно целое число интервалов между вспышками, чтобы сдвинуться ровно на один шаг шариков.

Ответ. $V = \dfrac{20}{n}$ см/с, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ — любое целое положительное число.