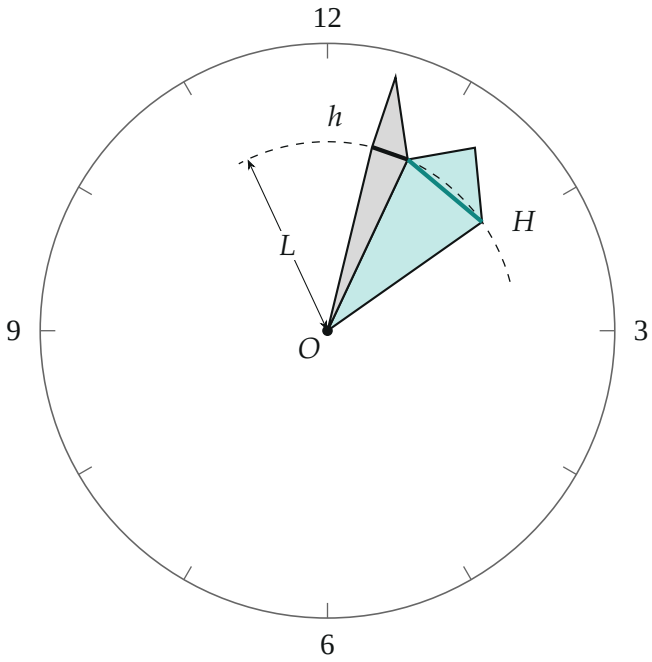
Обгон стрелок башенных часов

Задача 3. [МОШ 2014/15, 7 класс, задача 3] Часовая стрелка на больших башенных часах в самом широком месте имеет ширину $H = 13$ футов. От концов отрезка такой ширины на часовой стрелке до оси циферблата часов расстояние равно $L = 25$ футов. Минутная стрелка на таком же расстоянии от оси циферблата имеет ширину $h = 5$ футов. Стрелки движутся плавно (без скачков). Определите, за сколько секунд минутная стрелка обгоняет часовую (во время обгона она частично закрывает часовую стрелку). Считается, что обгон начинается в момент, когда минутная стрелка начинает закрывать часовую стрелку в её самом широком месте, а заканчивается, когда стрелки перестают «перекрываться» в этом месте для наблюдателя, смотрящего на часы издалека.

Для справки: длина окружности радиусом R равна $2\pi R$, где $\pi \approx 3{,}14$.



Поясняющий рисунок. Часы (рисунок в масштабе при $L = 25$ фт → 2,5 см): серая — минутная стрелка, бирюзовая — часовая; жирными отрезками

показаны ширины h и H на расстоянии L от оси O. Показан момент начала обгона: края стрелок только что соприкоснулись.

▲ **Решение. Что происходит.** Обе стрелки вращаются равномерно, но минутная делает оборот за час, а часовая — за двенадцать. Поэтому минутная догоняет часовую и проходит её; пока она идёт мимо, она на время закрывает часовую. На любом одинаковом расстоянии от оси точка минутной стрелки движется быстрее точки часовой, так что для «обгона» важна только разность скоростей. Это задача на относительное движение: в системе отсчёта часовой стрелки она стоит, а минутная проходит мимо неё со скоростью, равной разности скоростей. Раз мы смотрим именно на расстоянии L от оси, считаем ширины стрелок длинами дуг окружности радиуса L между краями стрелки; такие дуги движутся вдоль окружности как обычные отрезки.

Обозначения. $T_м = 1$ ч $= 3600$ с — период минутной стрелки; $T_ч = 12$ ч $= 43200$ с — период часовой; $v_м$, $v_ч$ — скорости точек стрелок на расстоянии L от оси; u — скорость минутной относительно часовой; s — смещение минутной стрелки относительно часовой; t — время обгона.

1. Скорости на расстоянии L. Точка, отстоящая от оси на L, за период проходит длину окружности $2\pi L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25$ фт $= 157$ фт:

$$v_м = \frac{2\pi L}{T_м} = \frac{157}{3600}\ \text{фт/с} \approx 0{,}0436\ \text{фт/с},$$
$$v_ч = \frac{2\pi L}{T_ч} = \frac{157}{43200}\ \text{фт/с} \approx 0{,}0036\ \text{фт/с}.$$

Обе скорости направлены по касательной к окружности радиуса L, в одну сторону (по часовой стрелке).

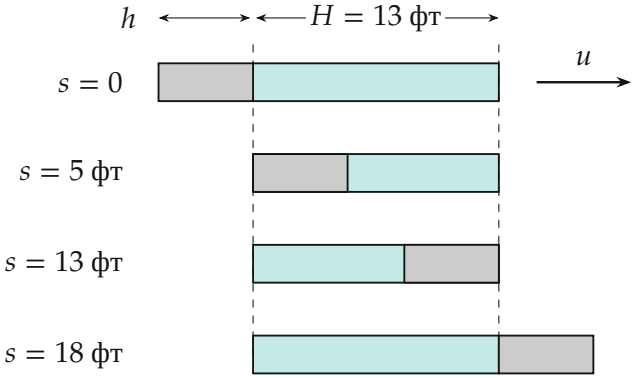
2. Относительная скорость. В системе отсчёта часовой стрелки минутная движется вдоль той же окружности со скоростью

$$u = v_м - v_ч = \frac{157}{3600} - \frac{157}{43200} = \frac{11 \cdot 157}{43200}\ \text{фт/с} \approx 0{,}0400\ \text{фт/с}.$$

3. Какое смещение нужно для обгона. В системе отсчёта часовой стрелки её самое широкое место неподвижно, а минутная стрелка на-

езжает на него и уезжает. Обгон начинается, когда передний край минутной стрелки касается заднего края часовой, и заканчивается, когда задний край минутной уходит за передний край часовой. Значит, полное смещение равно ширине часовой плюс ширина минутной:

$$s = H + h = 13 + 5 = 18 \text{ фт}.$$

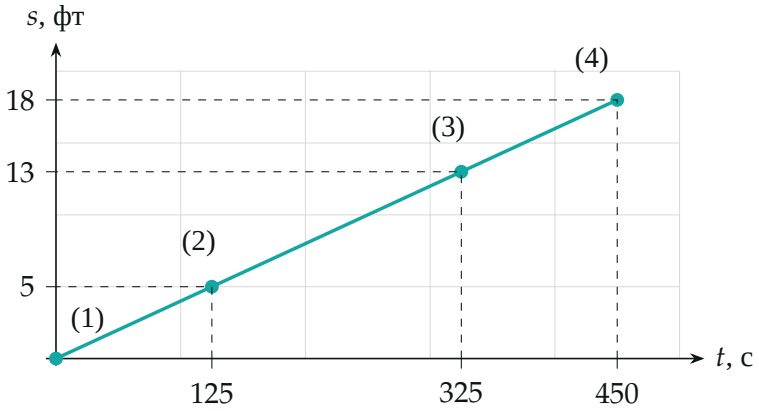


Картина в системе отсчёта часовой стрелки (бирюзовая, ширина H). Серая минутная стрелка (ширина h) движется слева направо, смещение s. Сверху вниз: $s = 0$ — край минутной касается края часовой, обгон начался; $s = h = 5$ фт — минутная целиком на часовой; $s = H = 13$ фт — её передний край достиг переднего края часовой; $s = H + h = 18$ фт — края разошлись, обгон закончился.

4. Время обгона. Относительное движение равномерное, поэтому $t = s/u$:

$$t = \frac{H + h}{u} = \frac{18}{0{,}0400} \text{ с} \approx 450 \text{ с} = 7{,}5 \text{ мин}.$$

В общем виде $t = \dfrac{H + h}{2\pi L\,(1/T_{\text{м}} - 1/T_{\text{ч}})}$.



Смещение минутной стрелки относительно часовой. Точки: (1) $s = 0$, $t = 0$ — обгон начался; (2) $s = 5$ фт, $t = 125$ с — минутная целиком на часовой; (3) $s = 13$ фт, $t = 325$ с — передний край минутной у переднего края часовой; (4) $s = 18$ фт, $t = 450$ с — обгон закончился.

Обратите внимание. Нужное смещение — не H и не h, а их сумма: пока края не коснулись, обгон не начался, а закончится он, только когда *обе* стрелки полностью разойдутся. Скорость точек считают на одном и том же расстоянии L от оси; на другом расстоянии скорости были бы другие, и ширины тоже.

Проверка. Единицы: фт/(фт/с) = с. Второй способ — через относительный оборот: за каждый час минутная стрелка делает на оборот больше, чем часовая, за 12 ч — на 11 оборотов, значит, одна и та же стрелка догоняет другую раз в $12/11$ ч ≈ 3927 с. За это время минутная проходит относительно часовой всю окружность $2\pi L = 157$ фт, а нам нужна доля $18/157 \approx 0{,}115$ этого пути: $0{,}115 \cdot 3927 \approx 450$ с. Предельный случай: если бы часовая стояла, понадобилось бы $18/v_м \approx 413$ с — чуть меньше, как и должно быть.

Смысл такой: относительная скорость стрелок мала (0,04 фт/с, то есть 2,4 фт в минуту), а пройти надо 18 фт, поэтому обгон занимает около семи с половиной минут.

Ответ. $t = 0{,}125$ ч $= 7{,}5$ мин ≈ 450 с.