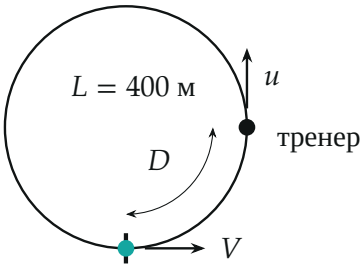
# Тренер и ученик на стадионе

**Задача 5.** [МОШ 2014/15, 7 класс, задача 5] Тренер проводит занятия по физкультуре необычным способом. Сам он начинает идти по кругу стадиона с постоянной скоростью $u = 1$ м/с. За тренером в тот же момент по кругу стадиона начинает бежать его ученик, который всё время движется с постоянной скоростью $V = 3$ м/с. Когда он достигает тренера, ученик быстро разворачивается, возвращается обратно, добирается до старта, снова быстро разворачивается, опять бежит до тренера, и далее повторяет эти действия нужное число раз. В конечном итоге тренер и ученик пришли к финишу одновременно, причём тренер прошёл менее одного круга.

1. Какой путь $S_1$ пробежал ученик к моменту первой встречи с тренером?
2. Какой путь $S$ пробежал ученик до момента финиша?

Длина окружности стадиона от старта до финиша равна $L = 400$ м. В момент старта ученика и тренера длина дуги окружности между ними была равна $D = 100$ м. Ученик начинает бежать с линии старта, которая совпадает с линией финиша.




*Поясняющий рисунок: вид стадиона сверху. Оба бегут против часовой стрелки; ученик стартует с линии старта, тренер — на дуге $D = 100$ м впереди.*

▲ **Решение. Что происходит.** Сначала ученик догоняет тренера: оба движутся в одну сторону, ученик быстрее. После встречи он разворачивается, бежит к старту, снова разворачивается и опять догоняет тренера, и так далее. Разворачивается ученик мгновенно, а модуль его скорости всё время равен $V$. Для первого вопроса нужна задача на «догонялки». Во втором вопросе пересчитывать все рейсы не нужно: ученик бежит с постоянной по модулю скоростью, поэтому его путь равен $V$, умноженной на всё время бега, а это время известно — оно равно времени, за которое тренер дойдёт до финиша.

**Обозначения.** $t_1$ — время до первой встречи; $T$ — время от старта до финиша; $S_1$ и $S$ — пути ученика к первой встрече и до финиша; все расстояния считаем вдоль круга от линии старта по ходу бега.

**Пункт 1.**

**1. Положение при старте.** Ученик на линии старта (координата 0), тренер впереди на расстоянии $D$ (координата $D$). Оба бегут вперёд, значит, расстояние между ними меняется на $V - u$ каждую секунду — это скорость сближения.

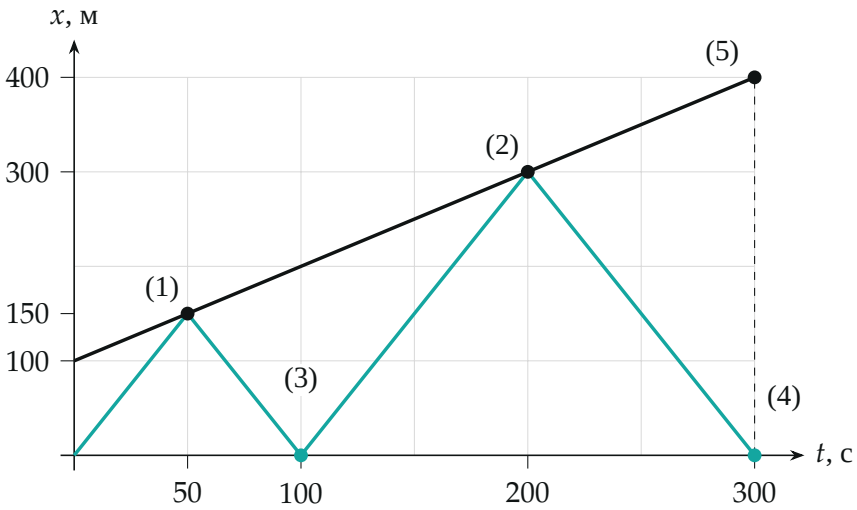
**2. Первая встреча.** Ученик догонит тренера, когда сократит расстояние $D$ до нуля:

$$t_1 = \frac{D}{V-u} = \frac{100}{3-1}\ \text{с} = 50\ \text{с}.$$

**3. Путь ученика к встрече.** Ученик бежал равномерно всё время $t_1$:

$$S_1 = Vt_1 = \frac{VD}{V-u} = 3 \cdot 50\ \text{м} = 150\ \text{м}.$$

Тренер за это время прошёл $ut_1 = 50$ м, то есть встреча произошла в $D + 50 = 150$ м от старта — ученик пробежал по прямой (по дуге) ровно до неё, без возвратов.




*Положение на круге (расстояние от линии старта по ходу бега) в зависимости от времени. Чёрная прямая — тренер, бирюзовая ломаная — ученик. (1) первая встреча в $t = 50$ с на 150 м; (2) вторая встреча в 200 с на 300 м; (3), (4) ученик у линии старта в 100 с и 300 с; (5) тренер у линии финиша в 300 с. Координаты 0 и 400 м — одна и та же линия.*

**Пункт 2.**

**4. Что известно о тренере.** Тренер идёт с постоянной скоростью $u$ и прошёл менее одного круга. Стартовал он в точке $D$ от линии старта, а финиш — та же линия, то есть точка $L$ от неё по ходу. Значит, до финиша он идёт путь

$$s_{\text{тр}} = L - D = 400 - 100 \text{ м} = 300 \text{ м}.$$

Условие «менее одного круга» нужно, чтобы не добавлять лишние круги: без него путь мог бы быть и $L - D + L$, и так далее.

**5. Время до финиша.** Тренер идёт равномерно:

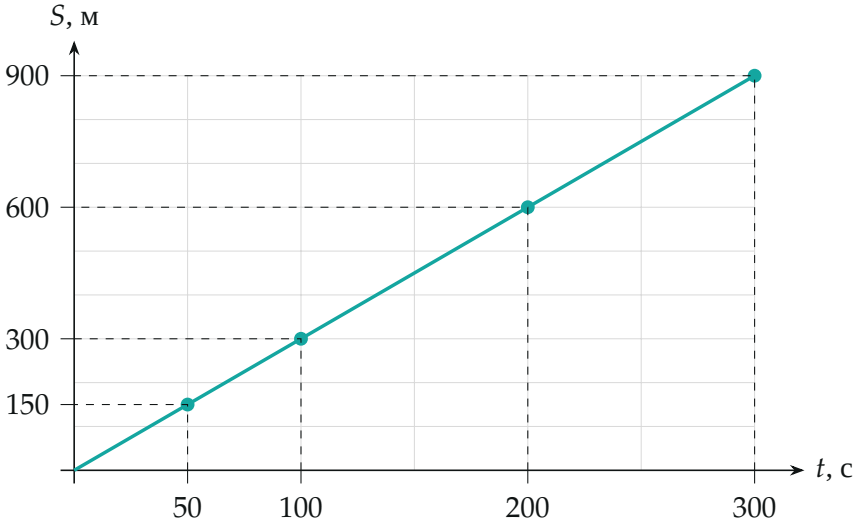
$$T = \frac{L - D}{u} = \frac{300}{1} \text{ с} = 300 \text{ с}.$$

Ученик пришёл к финишу одновременно с тренером, то есть бегал ровно столько же.

**6. Путь ученика.** Все повороты мгновенные, и модуль скорости уче-

ника не меняется, поэтому его путь — это $V$, умноженная на время бега, независимо от того, сколько раз он разворачивался:

$$S = VT = \frac{V(L-D)}{u} = 3 \cdot 300 \text{ м} = 900 \text{ м}.$$




*Путь ученика $S$, пройденный за время $t$ (все пробежки вперёд и назад складываются). Прямая $S = Vt$ проходит через точки $(50\ с; 150\ м)$ — первая встреча — и $(300\ с; 900\ м)$ — финиш.*

**Обратите внимание.** Путь и перемещение — разные вещи: 900 м — пройденный путь, а от старта к финишу ученик за это время «ушёл» на ноль (он вернулся на линию старта–финиша). Пересчитывать каждый рейс отдельно (геометрическая прогрессия, число встреч) для ответа не нужно.

**Проверка.** Единицы: м/с · с = м. Второй способ для пункта 2 — по рейсам (рисунок со встречами): 0 → 150 м (первая встреча в 50 с), назад 150 → 0 (в 100 с), вперёд до второй встречи (0 → 300 м, в 200 с), назад 300 → 0 (в 300 с, как раз в момент, когда тренер у финиша). Путь: 150 + 150 + 300 + 300 = 900 м. Заодно видно, что условие «пришли

одновременно» при этих числах выполняется — у данных нет противоречия.

Смысл такой: скорость ученика постоянна, значит, его путь определяется только временем, а время задаёт тренер.

**Ответ.** 1) $S_1 = \dfrac{VD}{V-u} = 150$ м; 2) $S = \dfrac{V(L-D)}{u} = 900$ м.