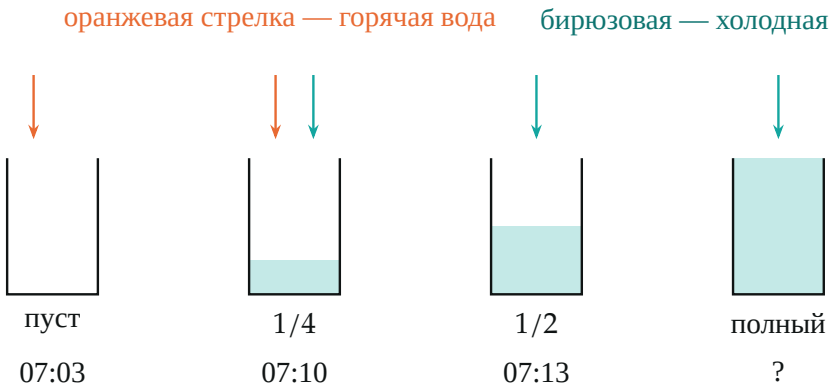
Наполнение сосуда двумя кранами

Задача 6. [МОШ 2014/15, 7 класс, задача 6] Школьник Николай проводит опыт по наполнению сосуда водой. Когда Николай открыл кран с горячей водой, электронные часы показывали 07:03. Когда сосуд заполнился на четверть (часы показывали 07:10), Николай дополнительно открыл кран с холодной водой. Когда сосуд заполнился до половины (на часах было 07:13), Николай закрыл кран с горячей водой. Каким может быть показание часов, когда сосуд заполнится полностью? При решении учитывайте, что часы показывают, например, время 07:03 в моменты времени от 7 ч 03 мин 00 с до 7 ч 03 мин 59,9999… с, а затем показание часов скачком изменяется на 07:04. Открывание и закрывание кранов производится очень быстро.



Поясняющий рисунок: состояния сосуда после каждого события и показание часов в этот момент.

▲ **Решение. Что происходит.** Часы показывают только минуты, поэтому каждое из трёх событий происходит в неизвестный момент внутри показанной минуты: «07:03» — это любой момент от 3 мин 00 с до 4 мин 00 с (конец не включается). Значит, времена между событиями известны не точно, а лишь в пределах: например, между «07:03» и «07:10» может пройти как чуть больше 6 мин, так и почти 8 мин. Через эти времена выражаются расходы кранов, а через расходы — время окончания. Найдём, в каких пределах оно может лежать.

Обозначения. Время считаем в минутах от 07:00. $t_0 = 3+a$ — открытие горячего крана, $t_1 = 10+b$ — сосуд заполнен на четверть, холодный кран открывается, $t_2 = 13 + d$ — сосуд наполовину, горячий кран закрывается, $t_к$ — момент, когда сосуд полон; a, b, d — неизвестные доли минуты, $0 \le a, b, d < 1$. Объём сосуда принимаем за 1; $q_г$, $q_х$ — расходы кранов (доли сосуда в минуту); $T_1 = t_1 - t_0$, $T_2 = t_2 - t_1$, $\tau = t_к - t_2$.

1. Расход горячего крана. С t_0 до t_1 работал только горячий кран, он налил $\frac{1}{4}$ сосуда:

$$q_г = \frac{1/4}{T_1} = \frac{1}{4T_1}.$$

2. Расход холодного крана. С t_1 до t_2 работали оба крана, и расходы складываются: вместе они налили ещё $\frac{1}{4}$ сосуда:

$$q_г + q_х = \frac{1}{4T_2} \quad \Rightarrow \quad q_х = \frac{1}{4T_2} - \frac{1}{4T_1}.$$

3. Время до заполнения. После t_2 льёт только холодный кран, и ему осталось налить $\frac{1}{2}$ сосуда:

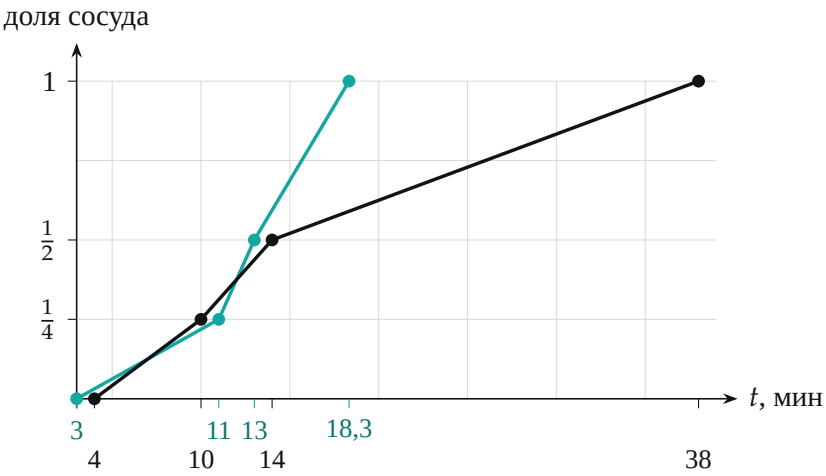
$$\tau = \frac{1/2}{q_х} = \frac{2}{\dfrac{1}{T_2} - \dfrac{1}{T_1}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 - T_2}, \qquad t_к = t_2 + \tau = 13 + d + \frac{2T_1T_2}{T_1 - T_2}.$$

Здесь $T_1 = (10+b)-(3+a) = 7+b-a$ и $T_2 = (13+d)-(10+b) = 3+d-b$.

4. Пределы T_1 и T_2. Так как a, b, d лежат от 0 (включая) до 1 (не включая),

$$6 < T_1 < 8, \qquad 2 < T_2 < 4, \qquad 13 \le t_2 < 14.$$

Крайние значения не достигаются: чтобы получить, например, $T_1 = 8$, нужно $b = 1$, а такого значения у доли минуты нет.



Заполнение сосуда в двух крайних случаях (по оси времени — минуты после 07:00). Бирюзовая: горячий кран открыт в 3,0, холодный в 11,0, горячий закрыт в 13,0 — сосуд полон в $18\frac{1}{3}$. Чёрная: 4,0, 10,0, 14,0 — сосуд полон в 38,0. Подписи по оси: верхний ряд (бирюзовые) — для бирюзовой линии, нижний — для чёрной. Наклон линии после t_2 — расход одного холодного крана.

5. Как время заполнения зависит от a, b, d. Запишем $\tau = 2 : \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$: чем больше T_2 и меньше T_1, тем меньше разность $\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$ и тем больше τ. Теперь по каждой неизвестной (остальные неизменны):

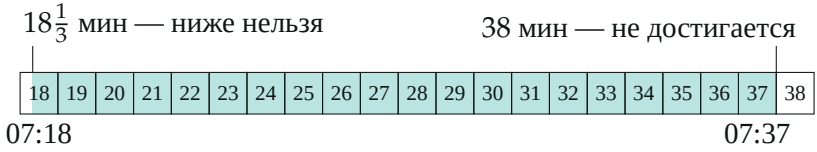
- a растёт: $T_1 = 7 + b - a$ уменьшается, τ растёт, t_2 не меняется — $t_к$ растёт;
- b растёт: T_1 растёт и $T_2 = 3 + d - b$ уменьшается, оба изменения уменьшают τ — $t_к$ падает;
- d растёт: T_2 растёт (и τ тоже), да ещё и $t_2 = 13 + d$ растёт — $t_к$ растёт.

Значит, наименьшее $t_к$ — при $a = 0$, $b \to 1$, $d = 0$; наибольшее — при $a \to 1$, $b = 0$, $d \to 1$.

6. Границы.

$$t_{\text{к,мин}} \to 13 + \frac{2 \cdot 8 \cdot 2}{8 - 2} = 13 + \frac{16}{3} = 18\frac{1}{3} \text{ мин},$$
$$t_{\text{к,макс}} \to 14 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{6 - 4} = 14 + 24 = 38 \text{ мин}.$$

Обе границы предельные: $b < 1$ и $a < 1$, $d < 1$, поэтому $18\frac{1}{3} < t_\text{к} < 38$. Величина $t_\text{к}$ зависит от a, b, d непрерывно (без скачков), поэтому принимает *все* значения между границами.



Минуты, на которые может прийтись момент $t_\text{к}$. Закрашено то, что достижимо; в ячейку «38» закрашенная часть не заходит.

Показание часов — номер текущей минуты: значения $t_\text{к}$ от $18\frac{1}{3}$ до 19 дают «07:18», от 19 до 20 — «07:19», и так далее до промежутка от 37 до 38, где часы показывают «07:37». Значение «07:38» потребовало бы $t_\text{к} \geq 38$, а оно строго меньше.

Обратите внимание. Ответ нельзя получить подстановкой «круглых» значений $T_1 = 7$, $T_2 = 3$ мин (из показаний часов) — это одна из бесчисленных возможностей: тогда получилось бы $t_\text{к} = 13 + \frac{2 \cdot 7 \cdot 3}{4} = 23{,}5$ мин, то есть 07:23, а правильный ответ — целый промежуток. Верхняя граница 38 мин — только предел, к которому можно сколь угодно близко подойти: промежуток «от 07:18 до 07:38» правый конец не включает, и последнее возможное показание — 07:37.

Проверка. Единицы: τ в минутах, расход — доля сосуда в минуту. Крайний случай внутри графика: для $t_0 = 3$, $t_1 = 11$, $t_2 = 13$ мин имеем $q_\text{г} = \frac{1}{32}$, $q_\text{х} = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$, и $\frac{1}{2} : \frac{3}{32} = \frac{16}{3}$ мин, т. е. $13 + 5\frac{1}{3} = 18\frac{1}{3}$ — согласуется с рисунком. Для $t_0 = 4$, $t_1 = 10$, $t_2 = 14$: $q_\text{г} = \frac{1}{24}$, $q_\text{х} = \frac{1}{16} - \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$ и $\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 24$ мин — те же 38. Середина диапазона, $a = b = d = 0{,}5$ (все события в середине своих минут): $T_1 = 7$, $T_2 = 3$,

$t_к = 13{,}5 + 10{,}5 = 24$ мин, то есть 07:24 — лежит внутри найденного промежутка.

Смысл такой: часы с точностью до минуты не фиксируют моменты событий, из-за этого время заполнения «размазывается» в промежуток длиной около двадцати минут.

Ответ. Часы могут показывать любое время от 07:18 до 07:38, не включая 07:38 (последнее возможное показание — 07:37): $18\frac{1}{3} < t_к < 38$ мин после 07:00.