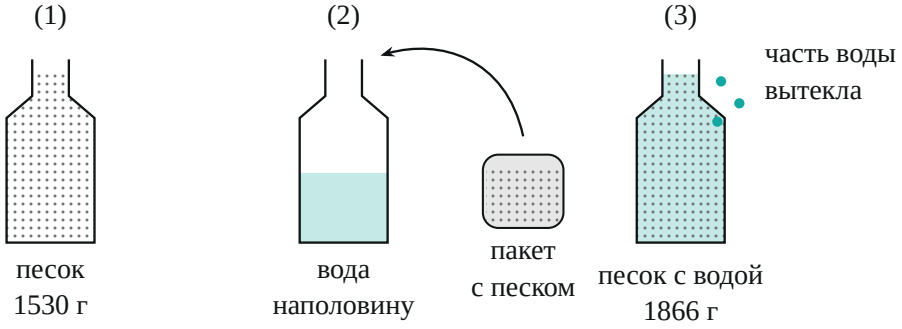
Плотность кварца в бутылке

Задача 7. [МОШ 2014/15, 7 класс, задача 7] Вася наполнил две одинаковые лёгкие пластиковые бутылки ёмкостью 1 литр кварцевым песком по самое горлышко, и взвесил их. Получились одинаковые массы 1530 г. Затем Вася аккуратно пересыпал песок из одной бутылки в пакет, заполнил бутылку наполовину водой и медленно высыпал весь песок из пакета обратно в эту бутылку, которая снова оказалась заполненной по самое горлышко смесью песка с водой. Весы показали массу бутылки 1866 г. Какова плотность кварца?



Поясняющий рисунок: (1) бутылка с песком, (2) в пустую бутылку налили воды до половины, (3) песок высыпан обратно — бутылка полна, часть воды вытекла.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Литр насыпанного песка — это не литр кварца: между зёрнами остаются промежутки с воздухом. Когда песок сыплют в воду, вода заполняет промежутки, воздух уходит, а лишняя вода вытекает через горлышко. В конце бутылка полна и в ней только вода и кварц, без воздуха. Плотность кварца — это масса песка, делённая на объём *самих зёрен*. Масса песка известна, объём зёрен надо найти: он равен объёму бутылки без объёма оставшейся воды.

Обозначения. $V = 1000$ см^3 — объём бутылки; $m = 1530$ г — масса песка; $M = 1866$ г — масса бутылки с песком и водой в конце; $m_в$, $V_в$ — масса и объём воды в бутылке в конце; $V_{кв}$ — объём зёрен кварца; $\rho_в =$

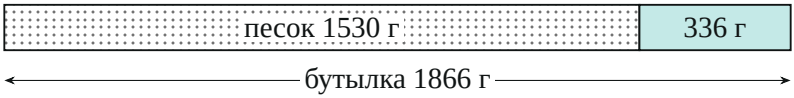
1 г/см^3 — плотность воды; $\rho_{кв}$ — искомая плотность кварца. Пластик считаем невесомым (так сказано: «лёгкие бутылки»).

1. Масса песка. Две бутылки одинаковые и с песком весят одинаково, а пластик почти ничего не весит, поэтому песок в одной бутылке имеет массу $m = 1530$ г. Весь этот песок затем пересыпали в воду.

2. Масса воды в конце. Бутылка в конце весит M, масса складывается из массы песка и массы воды:

$$m_в = M - m = 1866 - 1530 = 336 \text{ г}.$$

Воды налили 500 см^3, то есть 500 г, а осталось 336 г: значит, часть воды вытекла (при высыпании).



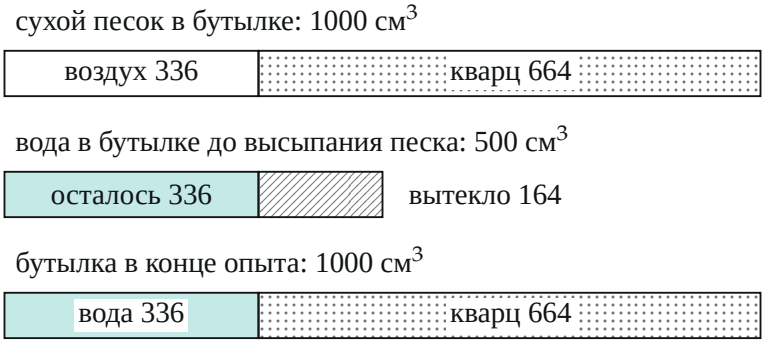
Масса бутылки в конце опыта: песок плюс оставшаяся вода (пластик не считаем).

3. Объём воды в конце. Плотность воды 1 г/см^3, поэтому объём равен массе, делённой на плотность:

$$V_в = \frac{m_в}{\rho_в} = \frac{336 \text{ г}}{1 \text{ г/см}^3} = 336 \text{ см}^3.$$

4. Объём зёрен. Бутылка заполнена доверху, воздуха нет, значит, весь её объём занят водой и кварцем:

$$V_{кв} + V_в = V \quad \Rightarrow \quad V_{кв} = 1000 - 336 = 664 \text{ см}^3.$$



Объёмы в одном масштабе (весь отрезок — 1000 см³). Сверху — сухой песок: зёрна 664 см³ и воздух 336 см³. В середине — воды было 500 см³, осталось 336, вытекло 164. Внизу — итог: вода заняла место воздуха между зёрнами.

5. Плотность кварца. Масса зёрен — это масса песка, объём — найденный $V_{кв}$:

$$\rho_{кв} = \frac{m}{V_{кв}} = \frac{1530\text{ г}}{664\text{ см}^3} \approx 2{,}30\text{ г/см}^3.$$

Общая формула: $\rho_{кв} = \dfrac{m}{V - (M-m)/\rho_в}$.

Обратите внимание. Нельзя брать 1000 см³ за объём кварца: насыпной литр песка включает воздух между зёрнами, и тогда получилось бы 1,53 г/см³ — это плотность песка насыпью, а не кварца. Нельзя и считать, что вся налитая вода осталась в бутылке: 1530 + 500 = 2030 г, а весы показали 1866 г.

Проверка. Единицы: г/см³. Второй способ: воздуха в сухом песке $1000 - 664 = 336$ см³ — как раз столько воды оказалось в бутылке, ведь вода заняла все промежутки между зёрнами (рисунок). Доля промежутков 0,336, поэтому плотность кварца $\rho_{кв} = \dfrac{1{,}53}{1 - 0{,}336} \approx 2{,}30$ г/см³ — то же самое. Значение больше плотности песка насыпью (1,53) и больше плотности воды, как и должно быть для камня.

Смысл такой: взвешивание показало, сколько воды удержали промежутки между зёрнами, а значит, и какую часть литра занимает сам кварц.

Ответ. $\rho_{кв} \approx 2{,}30$ г/см³.