Блок, стержень и грузы

Задача 2. [МОШ 2014/15, 8 класс, задача 2] С какой вертикально направленной силой F следует удерживать груз массой m_1 для того, чтобы изображенная на рисунке конструкция из блока, невесомых нитей, легкого стержня и грузов находилась в равновесии? Массы грузов $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $M = 3$ кг. Трения в оси блока нет. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

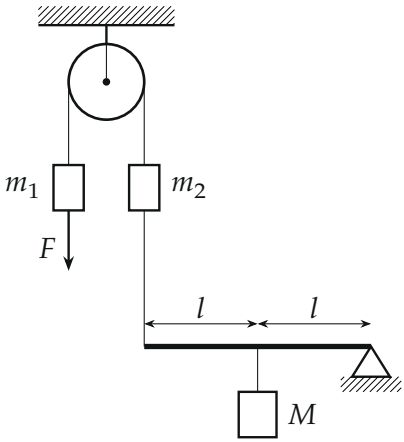


Рис. 1. Условие: через блок перекинута одна нить, на её концах висят m_1 и m_2; нить от m_2 идёт вниз к левому концу лёгкого стержня длиной $2l$, который опирается правым концом на шарнир; груз M подвешен посередине стержня

▲ **Решение. Что происходит.** Конструкция неподвижна, значит равновесны все тела: стержень, оба груза и (невесомый) блок. Идём от стержня к блоку: из правила рычага для стержня найдём силу, с которой нить тянет стержень вверх, потом — силу натяжения нити, перекинутой через блок, потом — силу F. Нить через блок одна, а трения в оси нет, поэтому её натяжение по обе стороны блока одинаково.

Обозначения. T_1 — сила натяжения нити, на которой груз m_2 висит над стержнем (нижняя нить); T_0 — сила натяжения нити, перекинутой через блок; O — шарнир на правом конце стержня.

1. Равновесие стержня. Стержень невесомый; на него действуют сила $\vec{T}_1$ нити, приложенная к левому концу вверх, сила $M\vec{g}$ нити с грузом

M, приложенная к середине вниз (нить невесомая и груз M неподвижен, значит она тянет стержень с силой Mg), и сила реакции шарнира $\vec{N}$ в точке O.

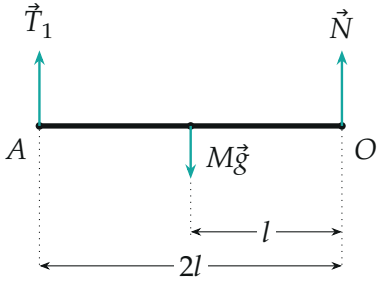


Рис. 2. Силы на стержне; плечо силы $\vec{T}_1$ относительно O равно $2l$, плечо силы $M\vec{g}$ равно l, у силы $\vec{N}$ плечо нулевое

Выберем ось вращения через шарнир O: тогда неизвестная сила $\vec{N}$ момента не создаёт (плечо нулевое) и в уравнение не войдёт. Правило рычага — сумма моментов сил относительно O равна нулю (стержень не вращается), момент силы $\vec{T}_1$ вращает стержень по часовой стрелке, момент $M\vec{g}$ — против:

$$T_1 \cdot 2l = Mg \cdot l \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{Mg}{2} = 15 \text{ Н}.$$

Второй способ (ось через левый конец A): $N \cdot 2l = Mg \cdot l$, $N = Mg/2$ — и сумма сил $T_1 + N = Mg$ как раз уравновешивает вес.

2. Равновесие грузов. Груз m_2 висит на нити через блок, а снизу его тянет вниз нить к стержню: по третьему закону Ньютона она тянет груз m_2 вниз с той же силой T_1 (нить невесомая). На груз m_1 вниз действуют вес $m_1\vec{g}$ и внешняя сила $\vec{F}$.

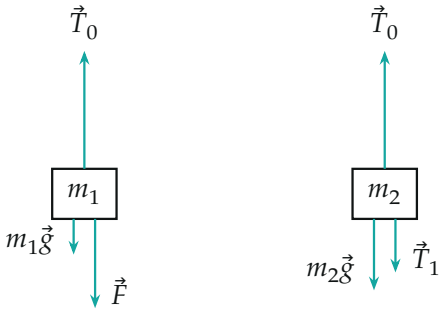


Рис. 3. Силы на грузах (длины стрелок — в одном масштабе: сумма сил вниз у каждого груза равна T_0)

Равновесие груза m_2 (проекция на вертикальную ось вверх):

$$T_0 - m_2 g - T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = m_2 g + \frac{Mg}{2} = 35 \text{ Н}.$$

Равновесие груза m_1 (нить натянута с той же силой T_0, потому что она одна и блок идеальный):

$$T_0 - m_1 g - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = T_0 - m_1 g.$$

3. Ответ. Подставляем T_0:

$$F = \left(m_2 - m_1 + \frac{M}{2}\right)g = (2 - 1 + 1{,}5) \cdot 10 = 25 \text{ Н}.$$

Сила направлена вертикально вниз (по рисунку условия): без неё более тяжёлая сторона перетянула бы.

Обратите внимание. Груз M действует на стержень в *середине*, а нить от m_2 — на конце: поэтому вес M делится пополам между нитью и шарниром, а не целиком уходит в нить.

Проверка. Размерность: mg — сила. Предел $M \to 0$: стержень ничего не весит, $T_1 = 0$, $F = (m_2 - m_1)g = 10$ Н — груз m_2 тяжелее m_1 на 1 кг, как и должно быть. Смысл: к весу m_2 добавляется половина веса M (вторая половина идёт в шарнир), а вес самого m_1 вычитается.

Ответ. $F = \left(m_2 - m_1 + \frac{M}{2}\right)g = 25$ Н, направлена вертикально вниз.