Пластилиновый кубик с полостью

Задача 3. [МОШ 2014/15, 8 класс, задача 3] Кубик из пластилина с длиной ребра 4 см, в котором есть внутренняя полость, держится в жидкости на плаву, погружаясь в нее на $1/24$ своего объёма. Если этот пластилиновый кубик смять и снова вылепить из него кубик, но уже без полости, то новый кубик тоже держится на плаву, погружаясь на $8/9$ своего объема. Считая, что при плавании верхняя грань кубика без полости горизонтальна, найдите, на сколько миллиметров он выступает из жидкости. Плотность пластилина при лепке не меняется.

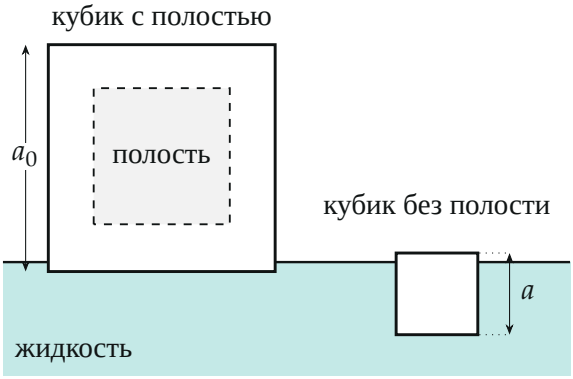


Рис. 1. Поясняющий рисунок в одном масштабе: кубик с полостью ($a_0 = 4$ см) погружён на $1/24$ объёма, кубик без полости с ребром a — на $8/9$ объёма; верхняя грань у него выступает над жидкостью

▲ **Решение. Что происходит.** Пластилина в обоих кубиках одно и то же количество, значит у них одинаковая масса и одинаковый вес. Оба плавают, поэтому в обоих случаях сила Архимеда уравновешивает один и тот же вес, а одинаковая сила Архимеда — это одинаковый объём вытесненной жидкости. Ключевой закон — условие плавания тела: сила Архимеда равна силе тяжести.

Обозначения. $a_0 = 4$ см — ребро кубика с полостью, $V = a_0^3 = 64$ см^3 — его объём; a — ребро нового кубика; m — масса пластилина; ρ — плотность жидкости; x — высота, на которую новый кубик выступает над жидкостью.

1. Плавание кубика с полостью. Тело покоится: сила тяжести $m\vec{g}$ вниз уравновешена силой Архимеда $\vec{F}_{A1}$ вверх. Погружена $1/24$ объёма, значит вытеснен объём $V/24$:

$$mg = F_{A1} = \rho g \frac{V}{24}.$$

2. Плавание нового кубика. Верхняя грань горизонтальна, значит, кубик стоит на воде прямо. Объём погружённой части — $\frac{8}{9}a^3$ (кубик погружён на $8/9$ объёма, и у куба с вертикальными гранями это значит осадка $\frac{8}{9}a$). Условие плавания для него:

$$mg = F_{A2} = \rho g \cdot \frac{8}{9}a^3.$$

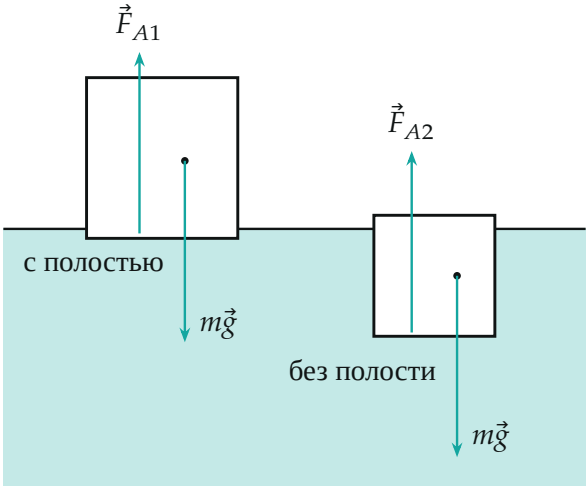


Рис. 2. Силы на каждом кубике: в обоих случаях $F_A = mg$ (все четыре стрелки одной длины; осадки — $1/24$ и $8/9$ ребра)

3. Ребро нового кубика. Левые части равны (mg одна и та же), сокращаем ρg:

$$\frac{V}{24} = \frac{8}{9}a^3 \quad \Rightarrow \quad a^3 = \frac{9V}{8 \cdot 24} = \frac{9 \cdot 64}{192}\ \text{см}^3 = 3\ \text{см}^3,$$

$$a = \sqrt[3]{3}\ \text{см} \approx 1{,}44\ \text{см}.$$

Заметим: a^3 — это и есть объём пластилина (в новом кубике полости нет).

4. Выступающая часть. Над жидкостью остаётся $1 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{1}{9}$ ребра:

$$x = a - \frac{8}{9}a = \frac{a}{9} = \frac{\sqrt[3]{3}}{9}\ \text{см} \approx 0{,}160\ \text{см} = 1{,}6\ \text{мм}.$$

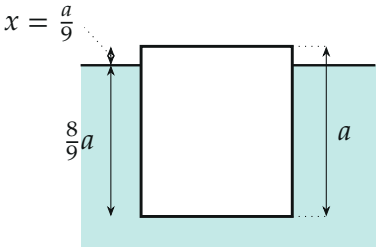


Рис. 3. Новый кубик: в жидкости — $\frac{8}{9}$ ребра, над жидкостью — $x = \frac{a}{9} \approx 1{,}6$ мм (масштаб рисунка условный)

Обратите внимание. Плотность жидкости не нужна: она сократилась, потому что оба кубика плавают в одной жидкости. Условие про горизонтальную верхнюю грань важно: иначе осадка куба не равнялась бы $8/9$ ребра.

Проверка. Размерность: a^3 — см^3, x — см. Второй способ: плотность пластилина $\rho_\text{п} = m/a^3 = \dfrac{8}{9}\rho$ меньше плотности жидкости (новый кубик действительно плавает); объём пластилина $a^3 = 3\ \text{см}^3$, полость $64 - 3 = 61\ \text{см}^3 > 0$ — полость помещается в кубик. Вытесненные объёмы: $64/24 = \dfrac{8}{3}\ \text{см}^3$ и $\dfrac{8}{9} \cdot 3 = \dfrac{8}{3}\ \text{см}^3$ равны, как и должно быть. Смысл: без полости кубик мелкий, лёгкий и торчит из жидкости всего на 1,6 мм.

Ответ. Новый кубик выступает из жидкости на $x = \dfrac{a}{9} = \dfrac{\sqrt[3]{3}}{9}\ \text{см} \approx 1{,}6$ мм.