Кипящая вода и дождь

Задача 4. [МОШ 2014/15, 8 класс, задача 4] Туристы развели костёр и поставили кипятиться воду в котелке с плоским дном и вертикальными стенками, заполнив котелок на $n = 3/4$ его объёма. Когда вода закипела, котелок не сняли с костра и, спустя время $t_1 = 10$ мин после начала кипения, количество воды в котелке уменьшилось на $\eta_1 = 34\%$. В этот момент начался дождь, но туристы продолжали поддерживать костёр, поскольку группа людей с продуктами задержалась. За следующие $t_2 = 8$ мин количество воды в котелке уменьшилось еще на $\eta_2 = 8\%$ от своего первоначального значения. Известно, что пустой котелок, поставленный вертикально на землю, наполнился бы под дождём доверху за время $t_3 = 64$ мин. Определите температуру дождевых капель до их попадания в котелок. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. Считайте, что подводимая к воде в котелке тепловая мощность всё время поддерживается постоянной. Интенсивность дождя не меняется.

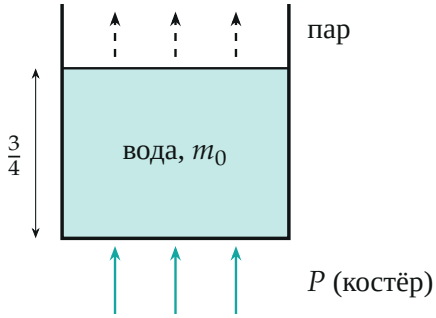


Рис. 1. Поясняющий рисунок: котелок заполнен на 3/4, костёр подводит постоянную мощность P, вода кипит и уходит паром

▲ **Решение. Что происходит.** Вода в котелке уже кипит, её температура $t_к = 100\,°C$ и не растёт: вся подводимая мощность идёт на испарение. До дождя это даёт мощность костра. Когда начался дождь, в котелок каждую минуту поступает холодная вода: её надо сначала нагреть до 100 °C, и часть мощности уходит на это, а на испарение остаётся меньше.

Тогда испарившейся воды получается меньше, чем без дождя, а убыль количества воды в котелке — это испарение минус поступившая дождём вода. Ключевой закон — баланс энергии за время t_2: мощность костра равна теплоте на испарение плюс теплоте на нагрев дождя до 100 °C.

Обозначения. $V_к$ — объём котелка, ρ — плотность воды, $m_0 = \rho n V_к$ — начальная масса воды, P — мощность костра, $m_п$ — масса воды, испарившейся за t_2, $m_д$ — масса дождевой воды, попавшей в котелок за t_2, T — искомая температура капель.

1. Мощность костра (до дождя). Вода кипит, температура постоянна, вся теплота идёт на парообразование. За t_1 испарилось $\eta_1 m_0$ воды:

$$Pt_1 = r\,\eta_1 m_0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{r\eta_1 m_0}{t_1}.$$

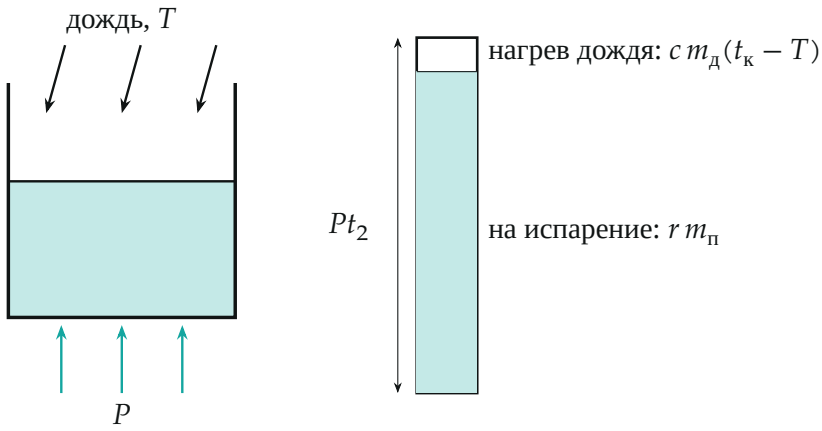


Рис. 2. Слева — котелок под дождём; справа — на что идёт энергия Pt_2 за время t_2: почти вся на испарение, малая часть — на нагрев дождевой воды до 100 °C (высоты частей пропорциональны 0,247 и 0,025 в единицах rm_0)

2. Дождь. У котелка вертикальные стенки, значит, сечение у него везде одно и то же, и вода собирается слоем: пустой котелок наполнился бы за t_3 целиком, то есть за единицу времени в него попадает объём $V_к/t_3$ (то же и в нашем котелке с водой — площадь приёма дождя не

меняется). За t_2 масса дождевой воды

$$m_д = \rho V_к \frac{t_2}{t_3} = \frac{m_0}{n}\frac{t_2}{t_3} = m_0\kappa, \qquad \kappa = \frac{t_2}{nt_3} = \frac{8}{0{,}75 \cdot 64} = \frac{1}{6}.$$

3. Баланс масс за t_2. Количество воды в котелке изменилось на $-\eta_2 m_0$ (убыль): воды стало меньше на испарившуюся и больше на дождевую, то есть $m_д - m_п = -\eta_2 m_0$:

$$m_п = \eta_2 m_0 + m_д = m_0\,(\eta_2 + \kappa).$$

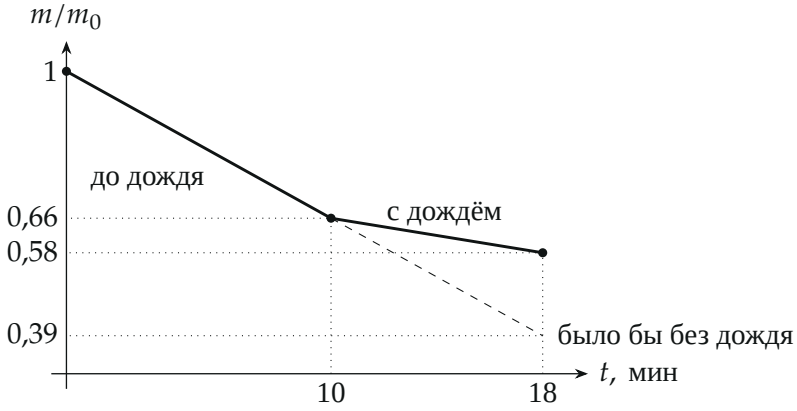


Рис. 3. Масса воды в котелке (в долях m_0; ось m/m_0 начинается не с нуля): до дождя убыль 0,34 за 10 мин; дальше с дождём — только 0,08 за 8 мин, а без дождя было бы 0,272 (пунктир)

4. Баланс энергии за t_2. Мощность та же P, вода кипит. Энергия Pt_2 идёт на испарение массы $m_п$ ($r\,m_п$) и на нагрев дождевой массы $m_д$ от T до $t_к = 100\,°\text{C}$ ($c\,m_д(t_к - T)$); подогрев самой кипящей воды не нужен, она уже при 100 °C:

$$Pt_2 = r\,m_п + c\,m_д\,(t_к - T).$$

Подставляем P из пункта 1, $m_п$ из пункта 3 и $m_д = \kappa m_0$; m_0 сокращает-

ся:

$$r\,\eta_1\frac{t_2}{t_1} = r\,(\eta_2+\kappa) + c\,\kappa\,(t_к - T).$$

Отсюда температура:

$$T = t_к - \frac{r}{c}\left[\frac{\eta_1 t_2/t_1 - \eta_2}{\kappa} - 1\right] = 100 - \frac{2{,}2\cdot 10^6}{4200}\left[\frac{0{,}272-0{,}08}{1/6} - 1\right]\,^\circ\text{C}.$$

В скобках $1{,}152 - 1 = 0{,}152$, поэтому нагрев дождя $\Delta t = 523{,}8\cdot 0{,}152 \approx 79{,}6\,^\circ$C и

$$T \approx 100 - 79{,}6 \approx 20{,}4\,^\circ\text{C}.$$

Обратите внимание. Проценты η_1, η_2 отсчитаны от *первоначальной* массы m_0. И 0,08 — это итоговая убыль воды (испарение минус дождь), а не масса испарившегося: испарилось больше, чем $0{,}08m_0$, на величину $m_д$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{r}{c}$ — градусы. Предельный случай: если бы дождь был горячим ($T = 100\,^\circ$C), на нагрев не уходило бы ничего, и тогда $\eta_1 t_2/t_1 = \eta_2 + \kappa$, то есть $0{,}272 = 0{,}247$ — не выполняется, значит дождь холодный: недостача $0{,}025\,rm_0$ как раз идёт на нагрев. Второй способ: по энергии $Pt_2 = 0{,}272\,rm_0$; на испарение $r\,m_п = r\cdot 0{,}2467\,m_0$ ($m_п = 0{,}08 + 0{,}1667 = 0{,}2467\,m_0$), остаток $0{,}0253\,rm_0 = 5{,}57\cdot 10^4\,m_0$ Дж/кг на нагрев $m_д = m_0/6$: $\Delta t = 5{,}57\cdot 10^4\cdot 6/4200 \approx 79{,}6\,^\circ$C — то же. Смысл: холодный дождь отбирает у костра около 9% мощности (0,0253/0,272), поэтому кипение заметно замедляется.

Ответ. $T = t_к - \dfrac{r}{c}\left[\dfrac{\eta_1 t_2/t_1 - \eta_2}{\kappa} - 1\right] \approx 20{,}4\,^\circ$C, где $\kappa = \dfrac{t_2}{nt_3}$.