Автомобилист и железнодорожный переезд

Задача 5. [МОШ 2014/15, 8 класс, задача 5] Автомобилист торопится на встречу с мотоциклистом. Они заранее договорились, что встретятся ровно в полдень в определенном месте между 60-м и 80-м километрами автодороги, в начале (на нулевом километре) которой находится автомобилист. Известно, что железнодорожные пути на 70-м километре дороги можно пересекать только с 11:50 до 12:05, а в остальное время переезд закрыт. Автомобилист утверждает, что, начав движение в 11:00, он двигался по дороге с постоянной скоростью, был в назначенном месте встречи вовремя, но, не застав там мотоциклиста, не останавливаясь, продолжил движение с той же скоростью и доехал до своего дома, который находится на 100-м километре дороги. По словам автомобилиста, на железнодорожном переезде он тоже не останавливался. С какой скоростью мог двигаться автомобилист?

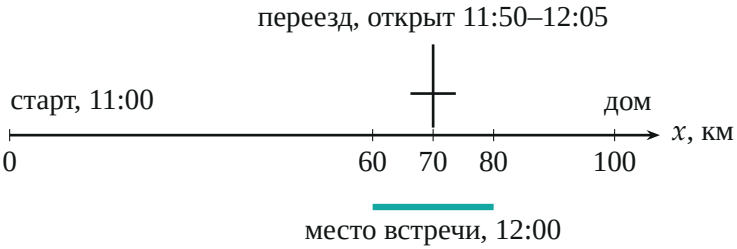


Рис. 1. Дорога: автомобилист стартует с 0-го километра в 11:00, встреча — в полдень где-то на отрезке 60–80 км (бирюзовый), переезд на 70-м километре можно проезжать с 11:50 до 12:05, дом — на 100-м километре

▲ **Решение. Что происходит.** Автомобилист едет равномерно: ровно в полдень он на месте встречи $x_в$, а 70-й километр проезжает в какой-то момент, который должен попасть в интервал, когда переезд открыт. Скорость и место встречи связаны: час езды до встречи даёт $x_в = v \cdot 60$ мин. Значит, выбрав $x_в$ на отрезке $[60; 80]$ км, мы однозначно получаем скорость, а потом проверяем, успевает ли переезд. Ключевой закон — путь при равномерном движении $x = vt$, а условие переезда — попадание момента в отрезок времени. Место встречи может быть как *до*, так и *после* переезда, поэтому разберём оба случая.

Обозначения. Время t отсчитываем в минутах от 11:00; ось x — вдоль дороги, километры от старта; $x_в$ — координата места встречи, v — скорость (км/мин), t_{70} — момент, когда автомобилист на 70-м километре. Переезд открыт при $50 \le t_{70} \le 65$ (11:50 — это $t = 50$, 12:05 — $t = 65$). Встреча в полдень — в момент $t = 60$.

1. Скорость через место встречи. В момент $t = 60$ автомобилист в точке $x_в$, двигаясь равномерно с нуля:

$$x_в = 60v, \qquad v = \frac{x_в}{60}.$$

2. Момент прохода переезда. До 70-го километра равномерным движением:

$$t_{70} = \frac{70}{v} = \frac{70 \cdot 60}{x_в} = \frac{4200}{x_в} \text{ (мин)}.$$

Чем дальше место встречи, тем быстрее едет автомобилист, тем раньше проходит переезд.

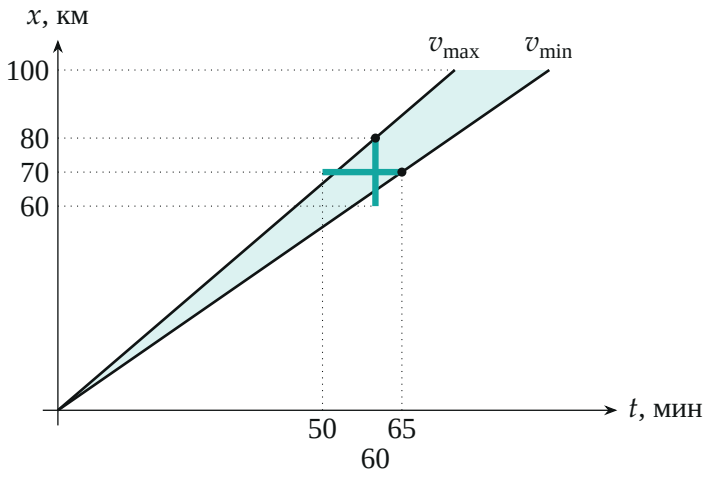


Рис. 2. График $x(t)$: бирюзовая вертикальная черта — возможное место встречи при $t = 60$, горизонтальная — переезд на 70-м километре, открытый с $t = 50$ до $t = 65$; прямая из начала координат допустима, если пересекает обе черты; крайние прямые — v_{min} и v_{max}, между ними — все допустимые скорости

3. Случай А: встреча после переезда или на нём ($70 \le x_в \le 80$). Тогда переезд пройден не позже полудня: $t_{70} = 4200/x_в \le 60$. Нижнюю границу $t_{70} \ge 50$ проверяем: $4200/x_в \ge 50$ при $x_в \le 84$ — верно для всех $x_в \le 80$. Значит, все $x_в \in [70; 80]$ подходят: $v \in \left[\frac{70}{60}; \frac{80}{60}\right] = \left[\frac{7}{6}; \frac{4}{3}\right]$ км/мин.

4. Случай Б: встреча до переезда ($60 \le x_в < 70$). Теперь переезд проходится после полудня: $t_{70} > 60$. Он не должен быть позже 65:

$$\frac{4200}{x_в} \le 65 \quad \Rightarrow \quad x_в \ge \frac{4200}{65} = \frac{840}{13} \approx 64{,}6 \text{ км}.$$

Подходят $x_в \in \left[\frac{840}{13}; 70\right)$, то есть $v \in \left[\frac{840}{13 \cdot 60}; \frac{7}{6}\right) = \left[\frac{14}{13}; \frac{7}{6}\right)$ км/мин. Меньше 64,6 км нельзя: автомобилист приехал бы на переезд после 12:05 (закрыт).

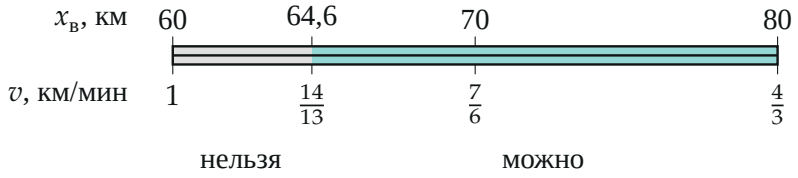


Рис. 3. Допустимые места встречи и скорости: серое — нельзя (на переезд после 12:05), бирюзовое — можно

5. Объединяем. Случаи А и Б вместе дают $x_в \in \left[\frac{840}{13}; 80\right]$ км и

$$v \in \left[\frac{14}{13}; \frac{4}{3}\right] \text{ км/мин} = \left[\frac{14}{13} \cdot 60;\ \frac{4}{3} \cdot 60\right] \text{ км/ч} \approx [64{,}6;\ 80] \text{ км/ч}.$$

Дорога дальше (до 100-го километра, где дом) на ограничения не влияет: переезд уже позади.

Обратите внимание. Встреча может быть и до переезда, и после, поэтому нужны два случая. В случае А переезд проходится до полудня, и условие «не раньше 11:50» выполняется само; в случае Б — после по-

лудня, и работает условие «не позже 12:05», которое и задаёт нижнюю границу скорости.

Проверка. Размерность: x/t — км/мин. Границы: при $v = \dfrac{4}{3}$ км/мин автомобилист в 12:00 на 80-м километре, а 70-й км проехал при $t_{70} = 52{,}5$ мин (в 11:52:30) — переезд открыт. При $v = \dfrac{14}{13}$ км/мин получаем $t_{70} = 70 \cdot \dfrac{13}{14} = 65$ мин, ровно 12:05. При меньшей скорости $t_{70} > 65$ — переезд уже закрыт. Ограничение сверху 80 км/ч не от переезда, а от условия, что место встречи не дальше 80-го километра. Смысл: нижняя граница скорости задана переездом, верхняя — границей зоны встречи.

Ответ. От $\dfrac{14}{13}$ км/мин $\approx 64{,}6$ км/ч до $\dfrac{4}{3}$ км/мин $= 80$ км/ч (включая границы).