Бруски на блоках и трение покоя

Задача 6. [МОШ 2014/15, 8 класс, задача 6] В системе, изображенной на рисунке, все блоки невесомые, нити легкие и нерастяжимые, трения в осях блоков нет. Участки нитей, не лежащие на блоках, горизонтальны. Массы брусков, указанные на рисунке, известны. Модуль максимальной силы трения между бруском M и площадкой, на которой он лежит, равен F.

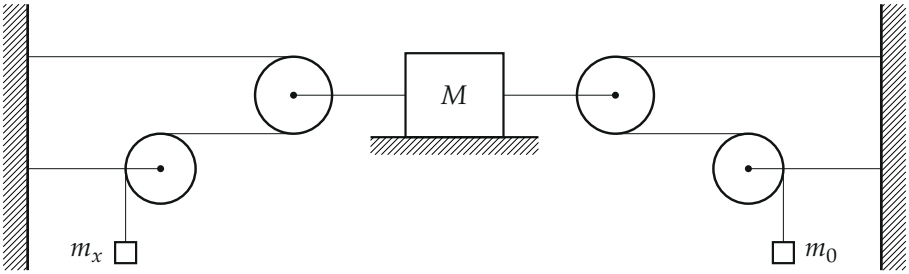


Рис. 1. Условие: слева — неподвижный блок (ось на стене) и подвижный блок, ось которого соединена нитью с бруском M; нить идёт от стены через подвижный блок и неподвижный к грузу m_x; справа то же самое с грузом m_0

1) Чему может быть равна масса m_x левого бруска для того, чтобы система находилась в равновесии?
2) Чему равно отношение модулей скоростей брусков M и m_x в случае нарушения равновесия системы?

▲ **Решение. Что происходит.** Левая часть — «полиспаст»: нить закреплена на стене, огибает подвижный блок и неподвижный и держит груз. Подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза (на брусок действует сила $2m_xg$), справа — то же самое ($2m_0g$). Брусок M тянут в разные стороны с силами $2m_0g$ и $2m_xg$, а разность уравновешивает трение покоя — оно может быть направлено в любую сторону, но не больше F. Отсюда — диапазон масс. Для скоростей работает нерастяжимость нити: подвижный блок даёт обратный проигрыш в перемещении в 2 раза.

Обозначения. T_x, T_0 — натяжения нитей слева и справа (нить с грузом m_x и с грузом m_0); S_x, S_0 — силы, с которыми нити, привязанные

к осям подвижных блоков, тянут брусок M; $F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя, действующая на M со стороны площадки; ось x направлена вправо.

Пункт 1. Равновесие.

1. Натяжение левой нити. Груз m_x покоится: сила тяжести $m_x\vec{g}$ уравновешена силой натяжения нити, поэтому $T_x = m_x g$. Нить одна на всём пути (стена, подвижный блок, неподвижный блок, груз), блоки невесомые и без трения, значит натяжение нити по всей длине одно и то же, равное T_x.

2. Подвижный блок. На подвижный блок действуют две ветви нити, обе вдоль горизонтали влево (одна идёт к стене, другая — к неподвижному блоку), каждая с силой T_x, и нить к бруску M с силой S_x вправо. Блок невесомый, значит сумма сил на него равна нулю (иначе по второму закону Ньютона он имел бы бесконечное ускорение): в проекции на x

$$S_x - 2T_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_x = 2m_x g.$$

Брусок M тянут влево с силой $2m_x g$ (по третьему закону Ньютона нить к бруску тянет его с той же силой S_x). Аналогично справа: $S_0 = 2T_0 = 2m_0 g$, брусок тянут вправо с силой $2m_0 g$.

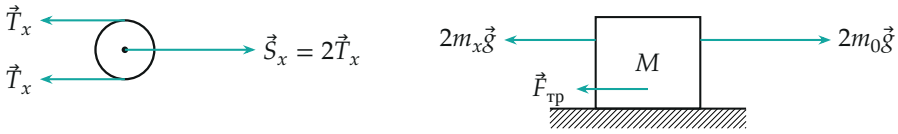


Рис. 2. Слева — силы на невесомом подвижном блоке (две ветви нити слева, одна нить вправо: $S_x = 2T_x$); справа — горизонтальные силы на бруске M (для случая $m_0 > m_x$: трение направлено влево, $2m_0 g = 2m_x g + F_{тр}$)

3. Равновесие бруска M. Вертикальные силы (тяжесть и реакция опоры) друг друга уравновешивают и в горизонтальную проекцию не входят. В проекции на ось x (вправо):

$$2m_0 g - 2m_x g + F_{\text{тр},x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр},x} = 2(m_x - m_0)g.$$

Это трение покоя: оно подстраивается под нужное значение, лишь бы его модуль не превышал максимального F (направление любое: пока

$m_0 > m_x$, брусок тянет вправо, трение влево, и наоборот):

$$|F_{\text{тр},x}| \le F \quad \Rightarrow \quad 2g\,|m_x - m_0| \le F \quad \Rightarrow \quad m_0 - \frac{F}{2g} \le m_x \le m_0 + \frac{F}{2g}.$$

Обратите внимание. Ответ — не одно значение, а промежуток: в равновесии могут быть и $m_x = m_0$ (трение не нужно), и значения, которые отличаются от m_0 не более чем на $F/(2g)$; на концах промежутка трение максимально. Если $F > 2m_0g$, левая граница отрицательна, и подходят все $m_x > 0$ до правой границы.

Пункт 2. Отношение скоростей.

4. Перемещения при нарушении равновесия. Пусть равновесие нарушено и брусок M сместился вправо на малое Δ (влево — то же самое, всё симметрично). Рассмотрим левую нить: она нерастяжима, а её длина складывается из ветви стена — подвижный блок, ветви подвижный блок — неподвижный блок, участка вокруг неподвижного блока и свисающего участка к грузу.

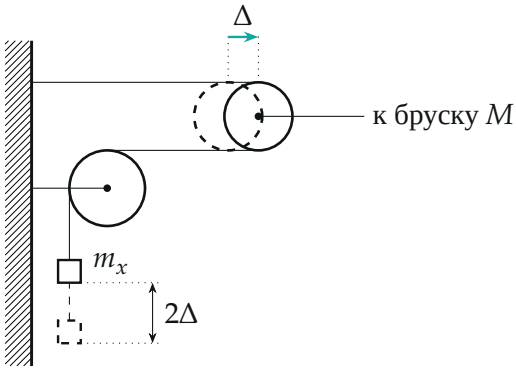


Рис. 3. Подвижный блок сместился вправо на Δ (штрих — прежнее положение): обе ветви нити слева удлинились на Δ, на эту длину 2Δ нить вытянулась с груза m_x, и груз поднялся на 2Δ

Ось подвижного блока и брусок M связаны нитью, поэтому блок смещается вправо на те же Δ. Обе ветви нити у подвижного блока (к стене и к неподвижному блоку) удлиняются каждая на Δ, всего на 2Δ. Длина

нити не меняется, значит удлинение на 2Δ происходит за счёт свисающего участка: груз m_x поднимается на 2Δ. Справа блок приближается к стене, обе ветви укорачиваются на Δ, и груз m_0 опускается на 2Δ.

5. Скорости. Те же перемещения делятся на один и тот же малый промежуток времени:

$$v_M = \frac{\Delta}{\Delta t}, \qquad v_{m_x} = \frac{2\Delta}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_M}{v_{m_x}} = \frac{1}{2}.$$

Проверка. Размерность: F/g — масса. Предел $F = 0$: $m_x = m_0$ единственное, как для системы без трения. Второй способ для скоростей: энергия. Брусок M сместился на Δ под действием силы $2m_0g - 2m_xg$, работа $2(m_0 - m_x)g\Delta$ равна работе силы тяжести на грузах при их перемещениях 2Δ (опускание m_0 и подъём m_x): $(m_0 - m_x)g \cdot 2\Delta$ — то же самое. Смысл: подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза и проигрыш в пути в 2 раза.

Ответ. 1) $m_0 - \dfrac{F}{2g} \le m_x \le m_0 + \dfrac{F}{2g}$; 2) $\dfrac{v_M}{v_{m_x}} = \dfrac{1}{2}$: модуль скорости бруска M вдвое меньше модуля скорости бруска m_x.