Метеорит на железных весах

Задача 7. [МОШ 2014/15, 8 класс, задача 7] Школьник Вася решил взвесить с помощью железных гирь найденный им недалеко от озера Чебаркуль небольшой кусок челябинского метеорита, используя симметричные равноплечие весы, сделанные из железа. В воздухе взвешивание дало результат $M = 2{,}1$ кг. Когда весы были полностью погружены в воду озера, результат был другим — для уравновешивания весов потребовалось положить на них гири, суммарная масса которых оказалась равной $m = 1{,}8$ кг. При этом и взвешиваемое вещество, и гири также были полностью погружены в воду. Чему равна плотность материала метеорита? Плотность железа равна $\rho_ж = 7{,}9$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3.

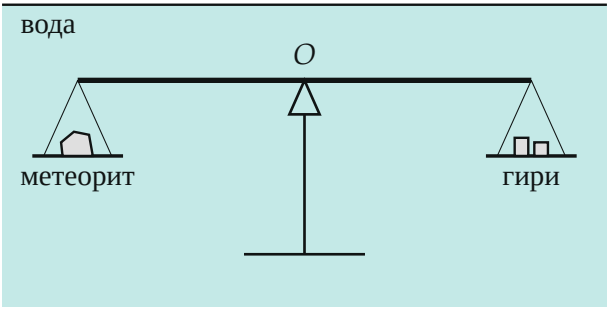


Рис. 1. Поясняющий рисунок: железные равноплечие весы целиком под водой; на левой чашке метеорит, на правой железные гири

▲ **Решение. Что происходит.** Под водой на каждое тело действует и сила тяжести, и сила Архимеда. Сила Архимеда действует и на сами весы, но они железные, симметричные и равноплечие: плечи, чашки и подвесы одинаковые, поэтому их вес и сила Архимеда на левой и правой половинах равны и друг друга уравновешивают, как и в воздухе. Равновесие решают только метеорит и гири: их «эффективные веса» (вес минус сила Архимеда) должны быть равны, плечи одинаковы. Ключевой закон — правило рычага; метеорит и гири — сплошные тела, поэтому сила Архимеда для них равна весу вытесненной воды.

Обозначения. ρ — искомая плотность метеорита, V — его объём, $V_г$ — объём гирь; M — масса метеорита (в воздухе весы уравновешены железными гирями массой M; архимедовой силой воздуха пренебрегаем), m — масса гирь под водой; l — длина плеча.

1. Объёмы. Масса, плотность и объём связаны формулой $m = \rho V$:

$$V = \frac{M}{\rho}, \qquad V_г = \frac{m}{\rho_ж}.$$

2. Силы на метеорит и на гири. На метеорит вниз действует сила тяжести $M\vec{g}$, вверх — сила Архимеда $\vec{F}_{A1}$ с модулем $\rho_в g V$. На гири — $m\vec{g}$ вниз и $\vec{F}_{A2}$ вверх с модулем $\rho_в g V_г$. Суммарная вертикальная сила на каждую чашку (вниз):

$$P_1 = Mg - \rho_в g\frac{M}{\rho} = Mg\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho}\right), \qquad P_2 = mg\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_ж}\right).$$

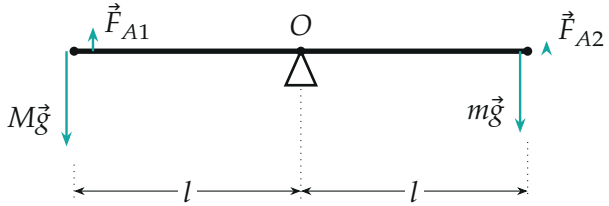


Рис. 2. Силы на концах коромысла (длины стрелок в одном масштабе, 0,6 см на 1 кг): вес вниз, сила Архимеда вверх; результирующие слева и справа равны (1,57 кг·g), плечи одинаковы

3. Правило рычага. Ось — опора O. Плечи равны (l), поэтому равенство моментов $P_1 l = P_2 l$ означает $P_1 = P_2$:

$$M\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho}\right) = m\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_ж}\right).$$

4. Решаем. Единственное неизвестное — ρ:

$$\frac{\rho_в}{\rho} = 1 - \frac{m}{M}\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_ж}\right) = \frac{M\rho_ж - m\rho_ж + m\rho_в}{M\rho_ж},$$

$$\rho = \frac{\rho_в \rho_ж M}{\rho_ж (M - m) + \rho_в m}.$$

Подставляем: числитель $1 \cdot 7{,}9 \cdot 2{,}1 = 16{,}59$, знаменатель $7{,}9 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 1{,}8 = 4{,}17$:

$$\rho = \frac{16{,}59}{4{,}17} \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \approx 4{,}0 \ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

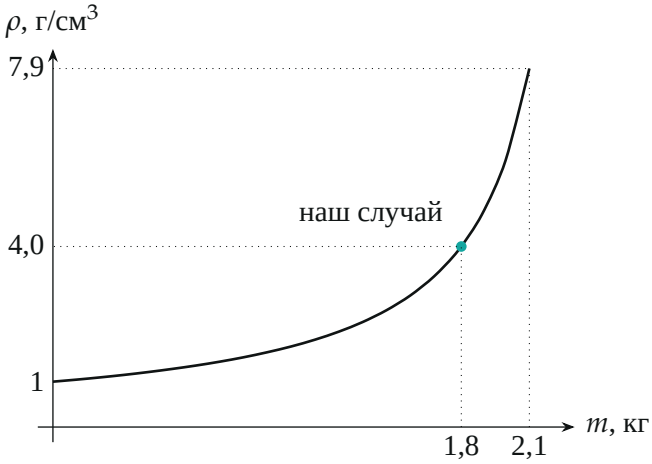


Рис. 3. Плотность метеорита ρ как функция показаний m при $M = 2{,}1$ кг: при $m = 0$ получается плотность воды (метеорит ничего не весит в воде), при $m = M$ — плотность железа; точка — $m = 1{,}8$ кг, $\rho \approx 4{,}0$ г/см^3

Обратите внимание. Не нужно «добавлять» архимедову силу самих весов: она симметрична и сокращается. Если бы весы были несимметричными (разные плечи, разные чашки), этого сокращения не было бы.

Проверка. Размерность: плотность через плотности. Пределы: $m = M$ даёт $\rho = \rho_ж$ (метеорит из железа уравновешивается равной массой железа в любой жидкости), $m = 0$ даёт $\rho = \rho_в$ (тело с плотностью воды в воде ничего не весит) — рис. 3. Второй способ — подстановка: $P_1/g = 2{,}1\,(1 - 0{,}2514) = 1{,}572$ кг, $P_2/g = 1{,}8\,(1 - 0{,}1266) = 1{,}572$ кг — равны. Смысл: метеорит примерно вдвое легче железа (каменный).

Ответ. $\rho = \dfrac{\rho_в \rho_ж M}{\rho_ж (M - m) + \rho_в m} \approx 4$ г/см^3.