Таяние льда в бочке

Задача 8. [МОШ 2014/15, 8 класс, задача 8] Цилиндрическая бочка с тонкими гладкими вертикальными металлическими стенками, в которую наливают воду для полива растений на даче, имеет радиус $R = 28{,}5$ см. Бочка установлена на подставках (см. рисунок) так, что между её дном и землёй имеется слой воздуха. Осенью в бочке случайно оставили некоторое количество воды, и когда начались заморозки, вода медленно замёрзла (бочка при этом не деформировалась). Высота уровня льда в бочке оказалась равной $h = 70$ см. Потом наступила оттепель, воздух прогрелся, и лёд нагрелся до температуры $t = 0\,^\circ\mathrm{C}$ одновременно со всех сторон (сверху, снизу и с боковой поверхности). Затем лёд начал таять, и за время $T = 1$ час растаяло $n = 2\%$ от всей массы льда. Чему будет равна высота уровня воды в бочке (считая от дна) через первый час таяния, и чему — через второй час таяния? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

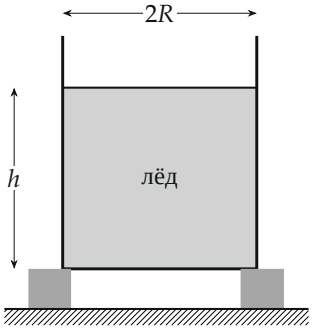


Рис. 1. Условие: бочка с тонкими гладкими стенками и тонким дном на подставках, лёд заполняет её до высоты h

▲ **Решение. Что происходит.** Лёд тает со всех сторон, талая вода собирается внизу и сбоку, лёд всплывает и плавает. Стенки гладкие и вертикальные, поэтому они не могут удерживать содержимое вертикально: весь вес льда и воды передаётся на тонкое дно, а вес содержимого, пока ничего не вытекает и не испаряется, не меняется. Давление воды на дно выражается через высоту столба воды H, давление дна на содержимое

— через вес. Приравниваем, и время из задачи уходит. Ключевые законы — условие равновесия содержимого бочки и давление жидкости на дно $p = \rho g H$.

Обозначения. $S = \pi R^2$ — площадь дна, M — масса всего льда в начале (она же масса всего содержимого бочки), H — высота уровня воды от дна, N — сила реакции дна на содержимое.

1. Масса содержимого. Лёд заполняет бочку до h, цилиндр льда имеет площадь основания S:

$$M = \rho_л S h.$$

Чтобы ничего не терялось, M остаётся массой всего содержимого (лёд + вода) в любой момент.

2. Равновесие содержимого. Рассмотрим систему «лёд + вода». Вертикальные силы на неё: сила тяжести $M\vec{g}$ вниз и сила реакции дна $\vec{N}$ вверх. Гладкие стенки действуют на неё только горизонтальными силами (трение о гладкую стенку нулевое), значит вертикально они не поддерживают. Система покоится: $N - Mg = 0$,

$$N = Mg = \rho_л S h g.$$

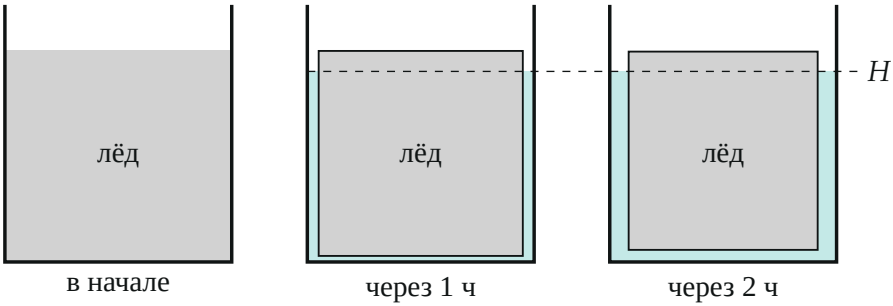


Рис. 2. Три состояния: сначала лёд заполняет бочку, потом тает со всех сторон, отходит от стенок и дна и плавает; под ним и у стенок — талая вода (зазоры увеличены для наглядности, на самом деле это доли сантиметра); уровень воды H (пунктир) один и тот же и через час, и через два

3. Плавает ли лёд. Лёд тает и снизу, и с боков, поэтому он отходит от дна и стенок, и под ним и вокруг него — вода. Проверим, что

лёд действительно всплывает, а не стоит на дне. Высота льда $h_л$ теперь меньше h (он подтаял сверху и снизу). Плавающий цилиндр погружается на глубину d, при которой вес вытесненной воды равен весу льда: $\rho_в g S_л d = \rho_л g S_л h_л$, то есть $d = \dfrac{\rho_л}{\rho_в} h_л$, где $S_л$ — площадь сечения льда. Уровень воды, найденный ниже, $H = \dfrac{\rho_л}{\rho_в} h$, а $h_л < h$, значит $d < H$: воды хватает, чтобы лёд плавал. Допущение «лёд отходит от стенок и плавает» следует из условия.

4. Давление на дно. Под льдом слой воды, и лёд плавает. Вся площадь дна под водой, вода неподвижна, давление на дно во всех точках одно: $p = \rho_в g H$ (давление в жидкости на глубине H). Сила давления на дно $N = pS$ (по третьему закону Ньютона это и есть сила, с которой дно держит содержимое):

$$N = \rho_в g H S.$$

5. Высота уровня воды. Приравниваем N из пунктов 2 и 4 и сокращаем gS:

$$\rho_в H = \rho_л h \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\rho_л}{\rho_в} h = \frac{900}{1000} \cdot 70 \text{ см} = 63 \text{ см}.$$

В формулу не входят ни время, ни доля растаявшего льда: пока лёд плавает, $H = 63$ см *одинаково* через час и через два.

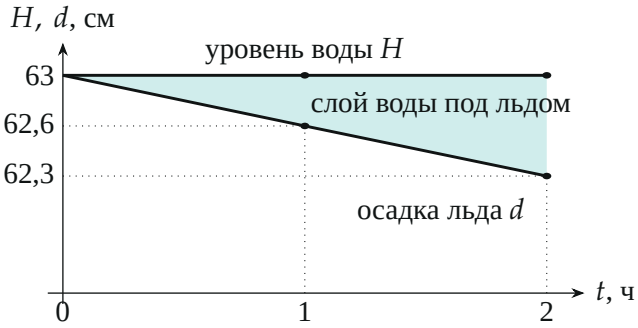


Рис. 3. Что происходит со временем: уровень воды $H = 63$ см не меняется, а осадка льда d уменьшается вместе с его массой; закрашенный слой — вода под льдом, он растёт (ось H, d начинается не с нуля)

Обратите внимание. Уровень воды не растёт по мере таяния, хотя воды в бочке становится больше: лёд плавает, вытесняя воду, вес которой равен его собственному, и, растаяв, этот лёд занимает в точности тот же объём воды. Размер бочки R, время T и доля $n = 2\%$ для ответа не нужны.

Проверка. Размерность: $\rho_л/\rho_в$ безразмерно, H — длина. Второй способ, по закону Архимеда: плавающий лёд массой $m_л$ вытесняет воду массой $m_л$; вода во всём объёме до уровня H даёт $\rho_в SH = m_в + m_л = M$, откуда $H = \dfrac{M}{\rho_в S} = \dfrac{\rho_л h}{\rho_в}$ — то же. Осадка льда через час: лёд тает со всех сторон слоем толщины δ, и $(R-\delta)^2(h-2\delta) = 0{,}98R^2h$ даёт $\delta \approx 0{,}20$ см, высоту льда $h_л \approx 69{,}6$ см, осадку $d = 0{,}9h_л \approx 62{,}6$ см, слой воды под льдом $H - d \approx 0{,}37$ см; через два часа $\delta \approx 0{,}41$ см, $d \approx 62{,}3$ см, слой $\approx 0{,}74$ см — рис. 3. Смысл: поднимается не уровень воды, а лёд над дном.

Ответ. Высота уровня воды одна и та же и через первый, и через второй час таяния: $H = \dfrac{\rho_л}{\rho_в} h = 63$ см.