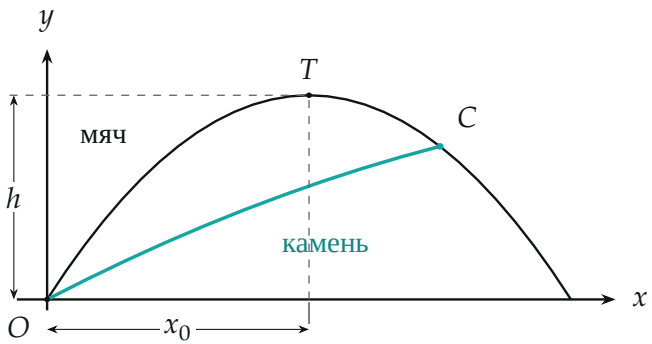
Мяч и камень в полёте

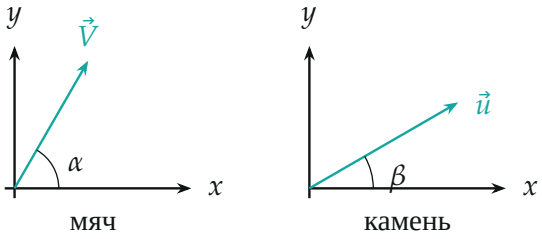
Задача 1. [МОШ 2014/15, 9 класс, задача 1] Мячик бросают с начальной скоростью V с поверхности земли под углом α к горизонту. В момент нахождения мячика на максимальной высоте из той же точки на поверхности земли бросают камень под углом β к горизонту. Размеры мячика и камня малы, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1. Определите, с какой начальной скоростью u бросили камень, если он столкнулся с мячиком во время его полёта.
2. Найдите время движения камня от момента его броска до момента столкновения с мячиком.



Траектории. Мяч (чёрная) бросили из O в момент $t = -t_0$; в верхней точке T (высота h, расстояние x_0 от O) бросают камень (бирюзовая) из той же точки O; тела встречаются в точке C. Рисунок в масштабе при $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

▲ **Решение. Что происходит.** Оба тела движутся только под действием силы тяжести: по горизонтали равномерно, по вертикали с ускорением g, направленным вниз. Столкновение значит, что в некоторый момент у тел совпадают обе координаты, x и y. Неизвестных две: скорость камня u и время его полёта t до встречи, уравнений тоже два (для x и для y), поэтому задача решается без лишних предположений. Начало отсчёта — точка броска O, ось x вдоль земли в сторону броска, ось y вверх; время t отсчитываем от броска камня, когда мяч в верхней точке T.



Углы бросков отсчитываются от горизонтали: α у мяча, β у камня.

Обозначения. t_0 — время подъёма мяча до верхней точки; x_0 и h — координаты верхней точки T; t — время полёта камня до встречи; C — точка встречи.

1. Верхняя точка траектории мяча. Вертикальная скорость мяча меняется по закону $v_y = V\sin\alpha - g\tau$ (τ — время от броска мяча). В верхней точке $v_y = 0$, значит

$$t_0 = \frac{V\sin\alpha}{g}, \qquad h = \frac{V^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{gt_0^2}{2}.$$

Горизонтальная скорость мяча постоянна и равна $V\cos\alpha$ (горизонтальных сил нет), поэтому к верхней точке мяч прошёл

$$x_0 = V\cos\alpha\cdot t_0 = \frac{V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

2. Движение мяча после броска камня. В момент t после броска камня мяч летит уже t_0+t. Его координаты (проекции равноускоренного движения):

$$x_{\text{м}} = V\cos\alpha\,(t_0+t), \qquad y_{\text{м}} = V\sin\alpha\,(t_0+t) - \frac{g(t_0+t)^2}{2}.$$

Подставим $V\sin\alpha = gt_0$:

$$y_{\text{м}} = gt_0(t_0+t) - \frac{g(t_0+t)^2}{2} = \frac{gt_0^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = h - \frac{gt^2}{2},$$
$$x_{\text{м}} = x_0 + V\cos\alpha\cdot t.$$

Мяч после верхней точки просто падает с высоты h с нулевой начальной вертикальной скоростью, а по горизонтали уходит от T на $V\cos\alpha\cdot t$.

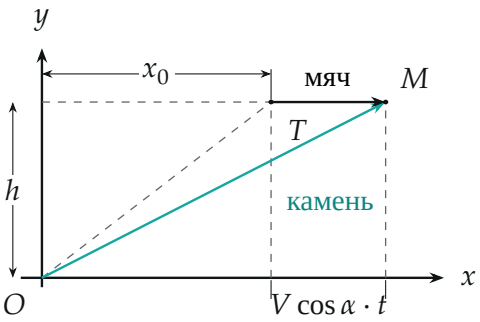
3. Движение камня. Камень брошен из O со скоростью u под углом β:

$$x_к = u\cos\beta\cdot t, \qquad y_к = u\sin\beta\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

4. Условие встречи. Совпадают обе координаты в один момент t (общий для обоих тел, потому что время отсчитываем от одного и того же момента). Для y:

$$u\sin\beta\cdot t - \frac{gt^2}{2} = h - \frac{gt^2}{2} \;\Rightarrow\; u\sin\beta\cdot t = h.$$

Слагаемые $gt^2/2$ сократились: обоим телам тяжесть «отнимает» по вертикали одно и то же, и встреча определяется только тем, чтобы камень успел подняться на высоту h *без учёта тяжести*. Иначе говоря, в системе отсчёта, падающей с ускорением g, оба тела летят равномерно по прямым (рисунок): мяч горизонтально от T, камень — по прямой из O.



Падающая система отсчёта: камень идёт по прямой OM, мяч — по TM.

Для x:

$$u\cos\beta\cdot t = x_0 + V\cos\alpha\cdot t \;\Rightarrow\; (u\cos\beta - V\cos\alpha)\,t = x_0.$$

Неизвестными остались u и t. Поделим второе уравнение на первое (и

тем самым уберём t):

$$\frac{u\cos\beta - V\cos\alpha}{u\sin\beta} = \frac{x_0}{h} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha.$$

5. Скорость камня. Выражаем u:

$$u\cos\beta - V\cos\alpha = 2\operatorname{ctg}\alpha\, u\sin\beta \;\Rightarrow\; u\,(\cos\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta) = V\cos\alpha,$$

$$\boxed{u = \frac{V\cos\alpha}{\cos\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\,\sin\beta}}.$$

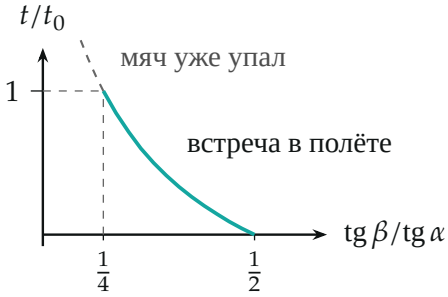
6. Время полёта камня. Из уравнения для y получаем $t = \dfrac{h}{u\sin\beta}$; подставляем h и u:

$$t = \frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}\cdot\frac{\cos\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta}{V\cos\alpha\,\sin\beta},$$

$$\boxed{t = \frac{V\sin^2\alpha\,(\cos\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\,\sin\beta)}{2g\cos\alpha\,\sin\beta}}$$

Если вынести $t_0 = V\sin\alpha/g$, получится короче: $t = t_0\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\,(\operatorname{ctg}\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha) = t_0\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}\beta} - 1\right)$.

Обратите внимание. Камень должен долететь до мяча, пока мяч в воздухе, то есть $0 < t \le t_0$ (за t_0 мяч падает с высоты h на землю). Из $t = t_0\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}\beta} - 1\right)$: условие $t > 0$ даёт $\operatorname{tg}\beta < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ (иначе $u < 0$: решения нет), условие $t \le t_0$ даёт $\operatorname{tg}\beta \ge \frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha$. Формулы верны, когда $\frac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha \le \operatorname{tg}\beta < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$.



Время полёта камня до встречи в долях t_0. Сплошная часть — допустимые углы; левее (штрих) мяч уже на земле, правее $\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ камню нужна бесконечная скорость.

Проверка. Размерность: u измеряется в тех же единицах, что V, а $t \sim V/g$ — секунды. Числовой пример (рисунок траекторий): $V = 10$ м/с, $g = 10$ м/с^2, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$. Тогда $t_0 = 0{,}866$ с, $x_0 = 4{,}33$ м, $h = 3{,}75$ м и

$$u = \frac{10 \cdot 0{,}5}{0{,}866 - 2 \cdot 0{,}577 \cdot 0{,}5} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3 \text{ м/с},$$

$$t = 0{,}866\left(\frac{1{,}73}{2 \cdot 0{,}577} - 1\right) = 0{,}433 \text{ с}.$$

Подставим во встречу: $x_к = 17{,}3 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}433 = 6{,}50$ м и $x_м = 4{,}33 + 5 \cdot 0{,}433 = 6{,}50$ м; $y_к = 17{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}433 - 0{,}94 = 2{,}81$ м и $y_м = 3{,}75 - 0{,}94 = 2{,}81$ м — совпали. Второй способ — система отсчёта, падающая с ускорением g (рисунок с треугольником): тела в ней летят по прямым, и то же отношение x_0/h даёт те же формулы.

Смысл: камень надо нацелить в точку M, где был бы мяч к моменту встречи, если бы тяжести не было; тяжесть смещает оба тела вниз одинаково и встрече не мешает.

Ответ. 1) $u = \dfrac{V\cos\alpha}{\cos\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\,\sin\beta}$;

2) $t = \dfrac{V\sin^2\alpha}{2g\cos\alpha\,\sin\beta}\,(\cos\beta - 2\operatorname{ctg}\alpha\,\sin\beta)$.