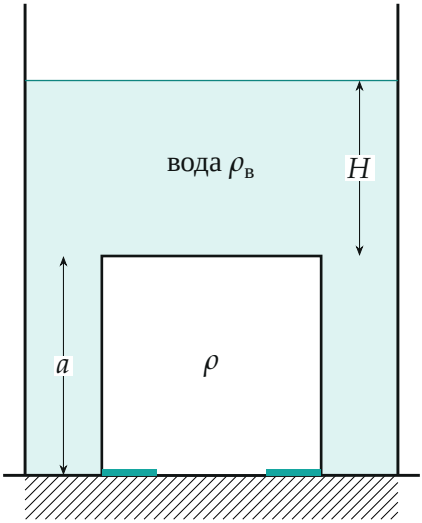
# Кубик на глине и подтекающая вода

**Задача 2.** [МОШ 2014/15, 9 класс, задача 2] На горизонтальном глинистом дне водоёма стоит кубик с длиной ребра $a$ и плотностью $\rho$. Высота уровня воды над верхней гранью кубика равна $H$. В начальный момент времени воды под кубиком нет. Вода начинает очень медленно подтекать под кубик. Чему будет равна площадь $S$ части нижней грани, которая останется сухой к моменту, когда кубик начнёт всплывать? Плотность воды равна $\rho_в$, кубик легче воды.




*Поясняющий рисунок: кубик на глине (вид сбоку). Вода подтекла под края дна (бирюзовые полоски), середина остаётся сухой.*

▲ **Решение. Что происходит.** Пока воды под кубиком нет, на нижнюю грань вода не давит, а на верхнюю давит сверху вниз, так что кубик прижат к глине. По мере подтекания вода занимает всё большую часть дна и давит на неё снизу вверх, причём на глубине $H + a$ — сильнее, чем сверху на глубине $H$. Кубик начинает всплывать, когда сила реакции глины $N$ обращается в нуль: вес кубика и давление воды сверху уравновешиваются давлением воды на мокрую часть дна. Нужно записать

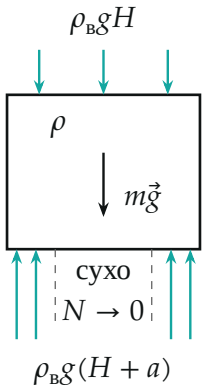
это равенство сил и найти из него сухую площадь $S$. Главная идея — сухая часть дна не получает давления воды, а значит, «подъёмная сила» меньше архимедовой.

**Обозначения.** $m = \rho a^3$ — масса кубика; $S$ — площадь сухой части нижней грани; $a^2 - S$ — площадь мокрой части; $N$ — сила реакции глины на сухую часть.

**1. Давление воды на грани.** Давление в покоящейся жидкости на глубине $y$ равно $\rho_в g y$ (избыточное над атмосферным; атмосферное давление действует на верхнюю грань и на нижнюю одинаково и сокращается — мы считаем, что и под сухой частью давление воздуха в порах глины равно атмосферному, воды там нет). Вода подтекает очень медленно, поэтому она покоится и в щели под кубиком давление определяется глубиной дна $H + a$. Силы:

- на верхнюю грань: давление $\rho_в g H$ одно на всей грани, сила вниз $F_1 = \rho_в g H \cdot a^2$;
- на мокрую часть нижней грани: давление $\rho_в g (H + a)$, сила вверх $F_2 = \rho_в g (H + a)\,(a^2 - S)$;
- на сухую часть воды нет: от неё остаётся только реакция глины $N$.

Силы на боковые грани горизонтальны и взаимно уравновешены (вертикальных составляющих у них нет).




*Давление воды на кубик (длина стрелок — давление, рисунок при $H = a$): сверху глубина $H$, снизу, под мокрыми краями, $H + a$; под сухой серединой воды нет, там действует только реакция глины $N$, в момент отрыва равная нулю.*

**2. Условие начала всплытия.** Кубик начнёт отрываться от глины, когда $N = 0$ и он ещё покоится. Второй закон Ньютона для кубика в проекции на вертикальную ось, направленную вверх (в этот момент ускорение равно нулю):

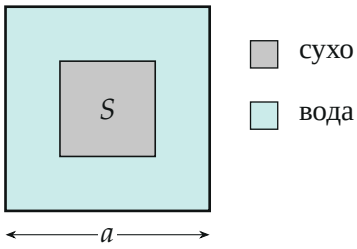
$$F_2 - F_1 - mg = 0, \qquad \text{то есть} \qquad \rho_в g(H+a)(a^2 - S) = \rho_в g H a^2 + \rho a^3 g.$$

Сократим на $g$ и раскроем скобку в левой части:

$$\rho_в(H+a)a^2 - \rho_в(H+a)S = \rho_в H a^2 + \rho a^3 \;\Rightarrow\; \rho_в a^3 - \rho_в(H+a)S = \rho a^3.$$

**3. Площадь сухой части.** Отсюда $\rho_в(H+a)\,S = (\rho_в - \rho)\,a^3$ и

$$\boxed{S = \frac{(\rho_в - \rho)\,a^3}{\rho_в\,(a+H)}}.$$




*Нижняя грань снизу: сухая часть площадью $S$ (серая) и мокрая площадью $a^2 - S$. Форма сухого пятна не важна — в уравнение входит только его площадь.*

**Второй способ.** Если бы вода подтекла под всю нижнюю грань, на кубик действовала бы обычная сила Архимеда $\rho_в g a^3$ (разность давлений на нижнюю и верхнюю грани: $\rho_в g(H+a)a^2 - \rho_в g H a^2$). Сухая часть площади $S$ «теряет» силу $\rho_в g(H+a)S$, поэтому подъёмная сила равна $\rho_в g a^3 - \rho_в g(H+a)S$; приравниваем её весу $\rho g a^3$ — получаем то же уравнение.

**Обратите внимание.** Сухая часть не создаёт архимедовой силы: формула «сила Архимеда равна весу вытесненной воды» к кубику, прижа-

тому к глине, неприменима. Нужна именно разность давлений на грани, а давление под сухой частью равно нулю (избыточное).

**Проверка.** Размерность: $S$ имеет размерность $\text{м}^3/\text{м} = \text{м}^2$, площадь. Предел $\rho \to \rho_\text{в}$ (почти нейтральный кубик): $S \to 0$, кубик отрывается, только когда вода почти полностью под ним. Предел $\rho \to 0$ (невесомый кубик): $S = \frac{a^3}{a+H} < a^2$: даже невесомому кубику нужна мокрая площадь $\frac{a^2 H}{a+H}$, чтобы давление снизу пересилило давление сверху; при $H \to 0$ он всплывает почти сразу. Числовой пример: $a = 10$ см, $H = 20$ см, $\rho = 0{,}6$ г/см$^3$: $S = \frac{0{,}4 \cdot 1000}{30} \approx 13{,}3$ см$^2$ ($\approx 13\,\%$ площади грани); проверка по уравнению: вниз $600 + 2000$ гс, вверх $30 \cdot (100 - 13{,}3)$ гс — оба раза 2600 гс.

Смысл: чем тоньше слой воды над кубиком (меньше $H$) и чем легче кубик, тем больше может остаться сухой площади.

**Ответ.** $S = \dfrac{(\rho_\text{в} - \rho)\, a^3}{\rho_\text{в}\,(a + H)}$.