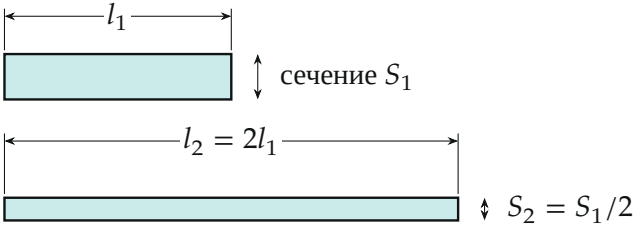
Кипятильник из переплавленной проволоки

Задача 3. [МОШ 2014/15, 9 класс, задача 3] Для изготовления нагревательной спирали кипятильника взяли проволоку длиной l_1. После подключения этого кипятильника к источнику напряжения с малым внутренним сопротивлением на нагревание некоторой массы воды в калориметре на $50\,^\circ\mathrm{C}$ было затрачено время $\tau_1 = 2$ минуты. Затем проволоку, из которой была сделана спираль кипятильника, расплавили и изготовили из расплава новую проволоку длиной $l_2 = 2l_1$. Из новой проволоки сделали другую спираль для кипятильника, опустили его в другой калориметр с другим количеством воды и подключили кипятильник к тому же источнику напряжения. На нагревание воды на $50\,^\circ\mathrm{C}$ во втором калориметре было потрачено время $\tau_2 = 12$ минут. Во сколько раз масса воды во втором калориметре отличается от массы воды в первом калориметре? Считайте, что потерь теплоты при нагревании воды не происходит, теплоёмкости калориметров пренебрежимо малы, а плотность и проводимость металла после переплавки остаются прежними.



Поясняющий рисунок: проволока до переплавки и после: длина вдвое больше, сечение вдвое меньше, объём тот же.

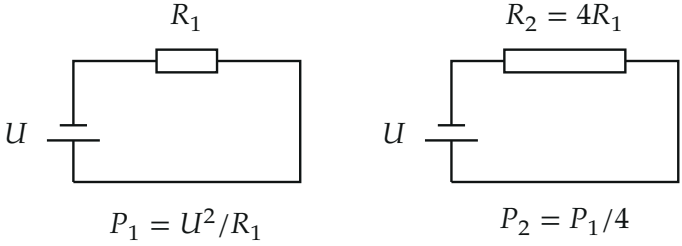
▲ **Решение. Что происходит.** При переплавке объём металла не меняется: проволока вдвое длиннее, значит, вдвое тоньше (сечение вдвое меньше). Её сопротивление растёт и из-за длины, и из-за тонкости — в четыре раза. Напряжение источника то же (внутренним сопротивлением пренебрегаем), поэтому мощность кипятильника падает в четыре раза. Но вся выделившаяся теплота идёт на нагрев воды: масса воды, нагретая на $50\,^\circ\mathrm{C}$, пропорциональна энергии $P\tau$. Главная идея — сравнить энергии, а не времена.

Обозначения. Индекс 1 — первая спираль, индекс 2 — вторая; ρ_0 — удельное сопротивление металла; S — площадь сечения; R — сопротивление спирали; U — напряжение источника; P — мощность спирали; m — масса воды; c — удельная теплоёмкость воды; $\Delta t = 50\,^\circ\text{C}$.

1. Сопротивление новой проволоки. Сопротивление проводника длиной l и сечением S из металла с удельным сопротивлением ρ_0 равно $R = \rho_0 \dfrac{l}{S}$. Объём металла сохранился: $l_1 S_1 = l_2 S_2$ (плотность прежняя, значит, и масса металла, и объём те же). При $l_2 = 2l_1$ получаем $S_2 = \dfrac{S_1}{2}$. Подставляем в формулу сопротивления:

$$R_2 = \rho_0 \frac{l_2}{S_2} = \rho_0 \frac{2l_1}{S_1/2} = 4\,\rho_0 \frac{l_1}{S_1} = 4R_1.$$

Свойства металла (ρ_0) не изменились — сказано, что проводимость остаётся прежней.



$P_1 = U^2/R_1$ $\qquad$ $P_2 = P_1/4$

Обе спирали подключены к одному и тому же источнику.

2. Мощность при том же напряжении. Внутреннее сопротивление источника мало, поэтому напряжение на спирали равно U в обоих опытах. Мощность спирали (закон Джоуля — Ленца в виде для заданного напряжения): $P = \dfrac{U^2}{R}$. Следовательно,

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1}, \qquad P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{U^2}{4R_1} = \frac{P_1}{4}.$$

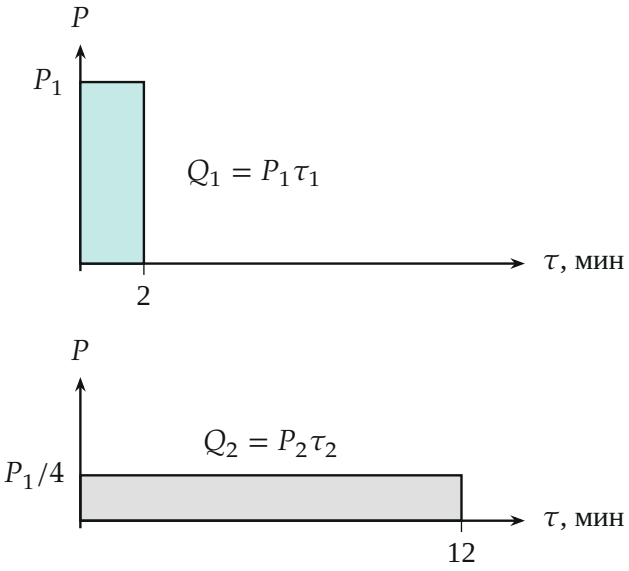
3. Энергия и масса воды. Потерь теплоты нет, теплоёмкость калориметра не учитываем, значит, вся электрическая энергия $P\tau$ идёт на

нагревание воды на Δt (количество теплоты $cm\Delta t$):

$$P_1\tau_1 = cm_1\Delta t, \qquad P_2\tau_2 = cm_2\Delta t.$$

Поделим второе уравнение на первое (так сокращаются c и Δt):

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2\tau_2}{P_1\tau_1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{12}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$



Энергия $P\tau$ — площадь прямоугольника при одной и той же шкале мощности. Верхний: $P_1 \cdot 2$ мин, нижний: $\frac{1}{4}P_1 \cdot 12$ мин $= P_1 \cdot 3$ мин; масса воды, нагретой на $50\,^\circ C$, пропорциональна площади — отношение $3/2$.

Обратите внимание. Мощность при постоянном напряжении падает с ростом сопротивления ($P = U^2/R$), а не растёт ($P = I^2R$ годится только при постоянном токе). Источник один и тот же — именно напряжение сохраняется, ток во втором опыте в четыре раза меньше.

Проверка. Размерность: отношение масс безразмерно. Предел: если бы длина не менялась ($l_2 = l_1$, $R_2 = R_1$), мы бы получили $m_2/m_1 =$

τ_2/τ_1, то есть вода нагревалась бы пропорционально времени — верно. Если бы времена совпали ($\tau_2 = \tau_1$), то $m_2/m_1 = \frac{1}{4}$: при вчетверо меньшей мощности той же энергии хватает на вчетверо меньшую массу — верно. По рисунку с площадями: площадь второго прямоугольника $\frac{1}{4}P_1 \cdot 6\tau_1 = 1{,}5\,P_1\tau_1$, то есть в 1,5 раза больше первой.

Смысл: вода во втором калориметре в полтора раза тяжелее — вдвое длинная проволока греет в четыре раза слабее, но работает в шесть раз дольше.

Ответ. Масса воды во втором калориметре больше в $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\tau_2}{4\tau_1} = 1{,}5$ раза.