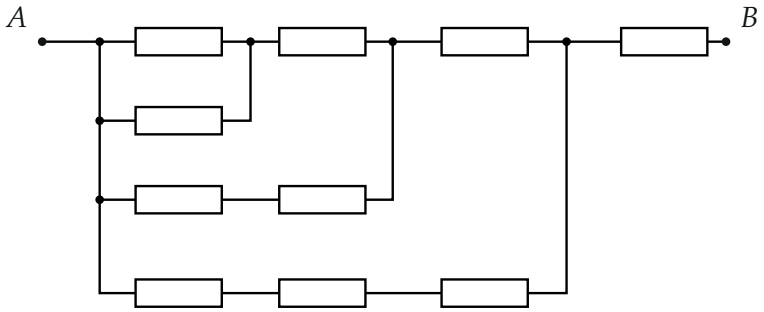
Перерезанный провод в цепи

Задача 4. [МОШ 2014/15, 9 класс, задача 4] Участок AB электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно $R_1 = 730$ Ом. После того, как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка AB стало равным $R_2 = 1360$ Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.



▲ **Решение. Что происходит.** Резисторов десять, и все одинаковые: сопротивление каждого обозначим R. Исходная схема сворачивается по правилам последовательного и параллельного соединения в один резистор; так R_1 выражается через R, и из $R_1 = 730$ Ом находится R. Затем нужно найти провод, после перерезания которого сопротивление станет $R_2 = 1360$ Ом; в единицах R это число окажется целым. Идея: перерезанный провод выключает часть схемы (тока в ней нет), и остаток нужно пересчитать теми же правилами.

Обозначения. Четыре ветви начинаются в левой вертикальной шине — узле a — и содержат один, ещё один, два и три резистора. Верхняя цепочка из четырёх резисторов (№1, №2, №3, №4 слева направо) соединяет a с B; узлы b, c, d — точки верхней цепочки справа от №1, №2 и №3, куда приходят концы нижних ветвей.

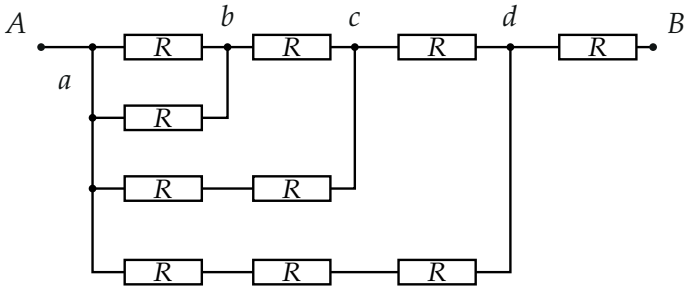


Схема с обозначениями: R — сопротивление каждого резистора; a, b, c, d — узлы.

1. Сопротивление исходной схемы. Сворачиваем схему от a вправо, каждый раз заменяя участок одним резистором.

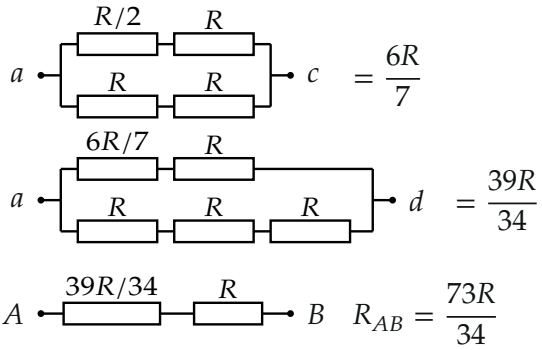
- Между a и b два резистора (№1 и резистор второй ветви) включены параллельно: $R_{ab} = R/2$.
- Последовательно к ним резистор №2: $R/2 + R = 3R/2$ между a и c. Этот путь параллелен ветви из двух резисторов, сопротивление которой $2R$:

$$R_{ac} = \frac{\frac{3}{2}R \cdot 2R}{\frac{3}{2}R + 2R} = \frac{6R}{7}.$$

- Последовательно резистор №3: $6R/7 + R = 13R/7$ между a и d. Параллельно ему ветвь из трёх резисторов, $3R$:

$$R_{ad} = \frac{\frac{13}{7}R \cdot 3R}{\frac{13}{7}R + 3R} = \frac{39R}{34}.$$

- Резистор №4 стоит последовательно: $R_{AB} = \frac{39R}{34} + R = \frac{73R}{34}$.



Свёртка по шагам: каждая пара параллельных ветвей и каждая цепочка заменена одним резистором.

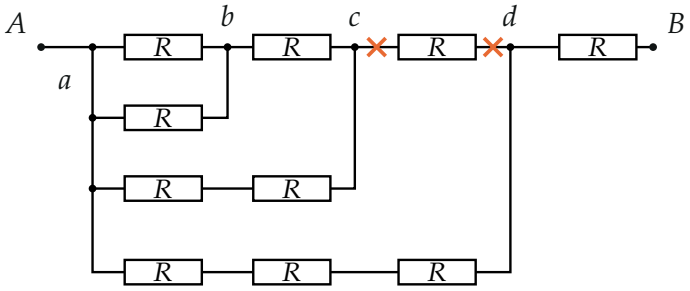
По условию $R_{AB} = R_1 = 730$ Ом, откуда

$$R = \frac{34}{73} \cdot 730 \text{ Ом} = 340 \text{ Ом}, \qquad R_2 = 1360 \text{ Ом} = 4R.$$

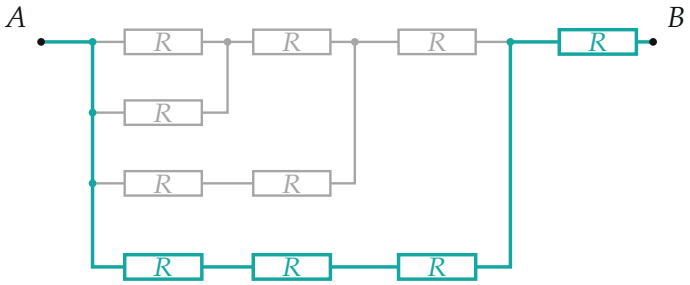
2. Какой разрез даёт $4R$**.** Перережем провод между узлом c и резистором №3 (или между резистором №3 и узлом d). Теперь верхняя часть схемы (узлы b и c, ветви из одного и двух резисторов, резисторы №1, №2 и №3) соединена с остальной цепью только в точке a: пути от неё к B нет, поэтому ток в ней не идёт, а потенциал всех её точек равен потенциалу a. Остаётся единственный путь от A к B: ветвь из трёх резисторов, затем резистор №4 — четыре резистора подряд:

$$R_2 = 3R + R = 4R = 4 \cdot 340 \text{ Ом} = 1360 \text{ Ом}.$$

Разрез с другой стороны от №3 даёт то же: путь через резистор №3 разорван, и между c и d других путей нет.



Крестики — два места разреза, по обе стороны от резистора №3.



После разреза: бирюзовый путь — единственный, по которому идёт ток (3R + R); серые резисторы и провода — тупики, тока в них нет.

Обратите внимание. Перерезан провод, а не резистор: тупиковые резисторы остаются в схеме, но тока в них нет, и в сопротивление они ничего не вносят.

Проверка. Размерность — омы. Другие места разреза (по очереди перерезали провод в каждом возможном месте, расчёт в python при $R = 340$ Ом) дают другие значения: провод у A или у B — обрыв цепи; участки шины — 1122, 1133 и 971 Ом; провода ветви из трёх резисторов — 971 Ом; ветви из двух — 804 Ом; рядом с резистором №2 — 850 Ом; рядом с резистором №1 и ветви из одного — 748 Ом. Ровно 1360 Ом получается только при разрезе по обе стороны от №3.

Смысл: сопротивление выросло почти вдвое, потому что весь ток пошёл по одному длинному пути из четырёх резисторов.

Ответ. Провод у резистора №3 верхней цепочки, с любой из сторон: между узлом c и этим резистором либо между ним и узлом d (крестики на рисунке). При этом $R = 340$ Ом, $R_2 = 4R = 1360$ Ом.