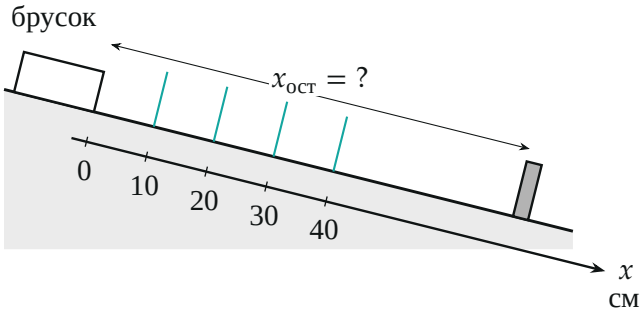
Равноускоренный брусок и погрешности

Задача 5. [МОШ 2014/15, 9 класс, задача 5] Школьница Варвара изучает равноускоренное движение бруска по наклонной плоскости вдоль оси x. С помощью специальных датчиков она исследует, в какие моменты времени t от начала движения передняя грань бруска проходит через точки с различными координатами x. Результаты измерений Варвара внесла в таблицу:

x, см	10	20	30	40
t, с	0,26	0,37	0,45	0,52

Погрешность измерения координаты составляет 0,1 см, точность показаний электронного секундомера 0,01 с. Брусок начинает двигаться без начальной скорости.

1. Каким может быть модуль ускорения бруска при движении по данной наклонной плоскости?
2. Какой результат можно получить при измерении координаты передней грани бруска в момент его остановки (из-за препятствия на наклонной плоскости), если секундомер в этот момент показал 0,69 с?



Поясняющий рисунок: датчики (бирюзовые) стоят при $x = 10, 20, 30, 40$ см.

▲ **Решение. Что происходит.** Брусок стартует из покоя и движется с постоянным ускорением, поэтому его координата растёт как $x = \dfrac{at^2}{2}$, а ускорение выражается через измеряемые величины: $a = \dfrac{2x}{t^2}$. Но каждое измерение неточно: и x, и t известны с погрешностями, а значит, каждое измерение допускает не одно значение a, а целый интервал. Ускорение у бруска одно и то же во всех четырёх измерениях, поэтому допустимы только такие значения, которые подходят всем четырём сразу, — пересечение интервалов. Для второго вопроса берём это допустимое ускорение, время остановки с погрешностью и считаем возможные координаты.

Обозначения. $\delta x = 0{,}1$ см $= 0{,}001$ м — погрешность координаты; $\delta t = 0{,}01$ с — погрешность времени; $a_i^{\min}$, $a_i^{\max}$ — границы интервала ускорения по i-му измерению.

Пункт 1.

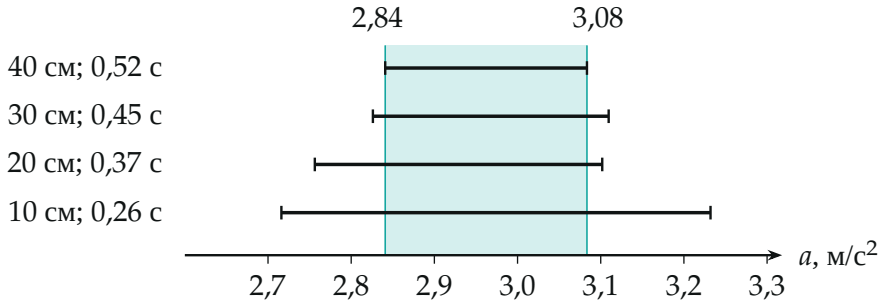
1. Закон движения. Равноускоренное движение без начальной скорости (ось x вдоль плоскости, t отсчитывается от начала движения, $x = 0$ в начале): $x = \dfrac{at^2}{2}$, откуда $a = \dfrac{2x}{t^2}$. Формула содержит только величины, которые измеряет Варвара.

2. Интервал по одному измерению. Истинные значения лежат в пределах $x \pm \delta x$ и $t \pm \delta t$. Величина $a = 2x/t^2$ растёт с ростом x и убывает с ростом t, поэтому наименьшее a получается при наименьшем x и наибольшем t, наибольшее — наоборот:

$$a^{\min} = \frac{2\,(x - \delta x)}{(t + \delta t)^2}, \qquad a^{\max} = \frac{2\,(x + \delta x)}{(t - \delta t)^2}.$$

Подставим (в м и с):

x, см	t, с	$a^{\min}$, м/с^2	$a^{\max}$, м/с^2
10	0,26	2,716	3,232
20	0,37	2,756	3,102
30	0,45	2,826	3,110
40	0,52	2,841	3,083



Интервалы ускорения по каждому измерению. Общая часть всех четырёх (бирюзовая полоса) — допустимые значения ускорения.

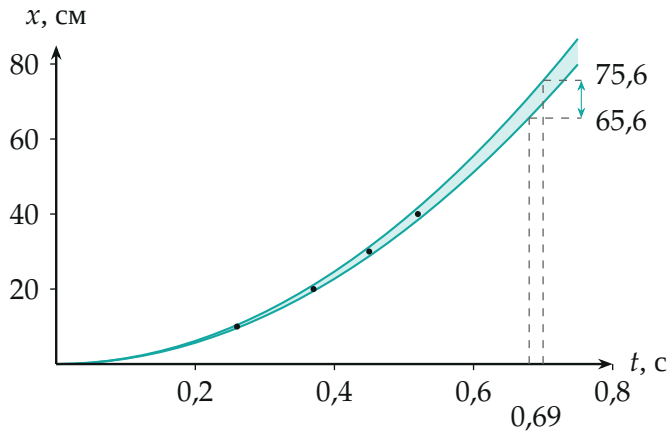
3. Пересечение интервалов. Подходящее a принадлежит всем четырём интервалам сразу. Нижняя граница общей части — наибольшая из нижних границ, 2,841 (четвёртое измерение); верхняя — наименьшая из верхних, 3,083 (тоже четвёртое). Итак,

$$2{,}84\ \text{м/с}^2 \le a \le 3{,}08\ \text{м/с}^2.$$

Пункт 2. Секундомер в момент остановки показал 0,69 с, значит, настоящее время $t \in [0{,}68;\ 0{,}70]$ с. Координата $x = \dfrac{at^2}{2}$ растёт и с a, и с t: наименьшее значение при $a_{\min}$ и $t_{\min}$, наибольшее при $a_{\max}$ и $t_{\max}$:

$$x_{\min} = \frac{2{,}84 \cdot 0{,}68^2}{2} \approx 0{,}657\ \text{м}, \qquad x_{\max} = \frac{3{,}08 \cdot 0{,}70^2}{2} \approx 0{,}755\ \text{м}.$$

Датчик координаты тоже ошибается на $\pm 0{,}1$ см, поэтому показание может отличаться от истинного: от $65{,}7 - 0{,}1 = 65{,}6$ см до $75{,}5 + 0{,}1 = 75{,}6$ см.



Все допустимые движения лежат в бирюзовой полосе между параболами $x = a_{\min}t^2/2$ и $x = a_{\max}t^2/2$; точки — измерения. Справа — диапазон возможных показаний при $t = 0{,}69$ с.

Обратите внимание. Ускорение одно, поэтому интервалы по разным измерениям не объединяют, а пересекают. Общая часть уже любого из интервалов; обе её границы задаёт четвёртое измерение — самое точное по относительной погрешности. В ответе организаторов (2,72–3,23 м/с^2 и 64,6–77,2 см) взят интервал одного первого измерения, то есть объединение интервалов; но ускорение 2,75 м/с^2 из него противоречит четвёртому измерению: за 0,51–0,53 с брусок прошёл бы не больше $\frac{1}{2} \cdot 2{,}75 \cdot 0{,}53^2 \approx 38{,}6$ см, а не $40 \pm 0{,}1$ см.

Проверка. Размерность: $2x/t^2$ — м/с^2. Точки измерений лежат внутри бирюзовой полосы, как и должно быть. Грубая оценка $a = 2x/t^2 \approx 2{,}95$ м/с^2 по каждому измерению (2,96; 2,92; 2,96; 2,96) лежит внутри найденного интервала, при $a = 2{,}95$ и $t = 0{,}69$ с получается $x \approx 70{,}2$ см — середина интервала 65,6–75,6 см.

Смысл: результат измерения всегда заключён в интервал, а не равен одному числу, и каждая новая точка сужает интервал ускорения.

Ответ. 1) 2,84 м/с$^2 \le a \le 3{,}08$ м/с^2;

2) от 65,6 до 75,6 см.