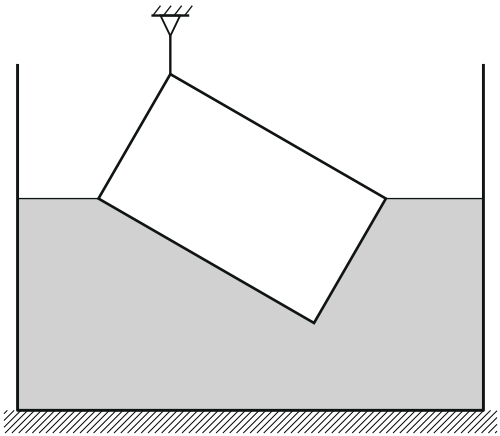
# Треугольный брусок на нитях над водой

**Задача 6.** [МОШ 2014/15, 9 класс, задача 6] Длинный однородный брусок с поперечным сечением в виде прямоугольника со сторонами $a \neq b$ подвешен на двух вертикальных нитях, прикреплённых к одному из рёбер, над сосудом, в который наливают воду. Когда в сосуд налили некоторое количество воды, два ребра бруска оказались точно на поверхности воды (вид сбоку, со стороны вышеупомянутого поперечного сечения, показан на рисунке). Найдите плотность материала, из которого сделан брусок. Плотность воды $\rho = 1$ г/см$^3$.

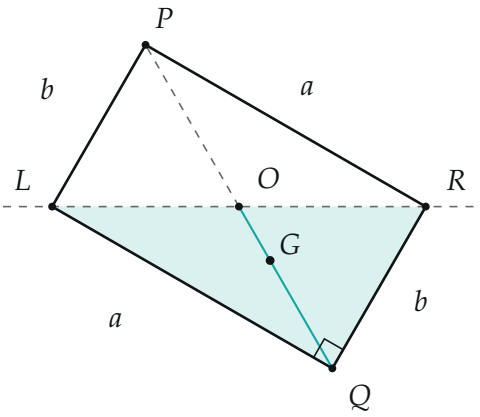


Примечание: центр масс однородного треугольника расположен на пересечении его медиан.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Брусок висит неподвижно: на него действуют сила тяжести, сила Архимеда и натяжение нитей, поэтому и сумма сил, и сумма моментов равны нулю. Нити вертикальны и прикреплены к ребру $P$ (на виде сбоку — к вершине $P$ сечения), поэтому момент их натяжения относительно $P$ равен нулю. Ось вращения проведём через $P$: тогда неизвестное натяжение в уравнение моментов не войдёт. Плотность бруска найдём из равенства моментов силы тяжести и силы Архимеда. Главная идея — найти, какая часть сечения погружена и где приложена сила Архимеда.

**Обозначения.** Сечение — прямоугольник $PRQL$ со сторонами $PR = QL = a$, $PL = RQ = b$ (вид сбоку); $O$ — центр прямоугольника (центр масс бруска); $\rho_0$ — плотность бруска; $\rho = 1$ г/см$^3$ — плотность воды; $s$ — длина бруска (перпендикулярно плоскости рисунка); $T$ — сила натяжения нитей; $\ell$ — горизонтальное расстояние от нити до $O$ (введено в пункте 2).

**1. Какая часть бруска под водой.** Два ребра бруска оказались точно на поверхности воды: на рисунке это вершины $L$ и $R$, а они противоположные вершины прямоугольника — отрезок $LR$ является его диагональю. Поверхность воды проходит через $LR$, поэтому диагональ горизонтальна. Диагональ делит прямоугольник на два одинаковых треугольника: под водой находится треугольник $LQR$ площадью $\dfrac{ab}{2}$ — половина бруска. Объём погружённой части $V_\text{п} = \dfrac{ab}{2}s$.




*Сечение бруска. Диагональ LR на поверхности воды; под водой треугольник LQR (бирюзовый, прямой угол при Q); G — точка пересечения его медиан.*

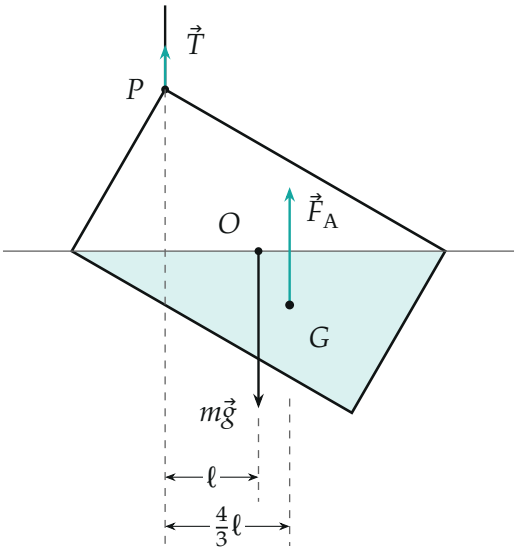
**2. Где приложены силы.** Сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в центре масс $O$ однородного прямоугольника — середине диагонали $PQ$ (диагонали прямоугольника делятся пополам). Сила Архимеда приложена в центре масс вытесненной воды, то есть в центре масс треугольника $LQR$ — точке $G$ пересечения его медиан. Медиана $QO$ проходит из вершины $Q$ в

середину $O$ противоположной стороны $LR$ и делится точкой $G$ в отношении 2 : 1 от вершины, поэтому

$$OG = \frac{OQ}{3}.$$

Точка $Q$ симметрична $P$ относительно $O$, так что горизонтальное смещение $G$ от $O$ втрое меньше горизонтального смещения $P$ от $O$ и направлено в противоположную сторону. Обозначим через $\ell$ расстояние по горизонтали от вертикальной линии нити (она проходит через $P$) до $O$. Тогда расстояние от этой линии до $G$ равно

$$\ell_G = \ell + \frac{\ell}{3} = \frac{4}{3}\ell.$$




*Силы на брусок (длины стрелок $mg : F_A = 4 : 3$): натяжение нитей $\vec{T}$ (вдоль нити через $P$), сила тяжести $m\vec{g}$ в точке $O$, сила Архимеда $\vec{F}_A$ в точке $G$. Плечи относительно оси через $P$: $\ell$ и $\frac{4}{3}\ell$.*

**3. Силы.** Масса бруска $m = \rho_0\, ab\, s$, а сила Архимеда равна весу воды

в объёме погружённой части:

$$mg = \rho_0 g\, ab\, s, \qquad F_A = \rho g\, V_п = \rho g \frac{ab}{2} s.$$

**4. Правило моментов.** Брусок покоится, поэтому сумма моментов сил относительно любой оси равна нулю (нужна ось, параллельная ребру). Выберем ось через $P$: тогда момент натяжения нитей равен нулю (линия действия силы $\vec{T}$ проходит через ось). Сила тяжести стремится повернуть брусок по часовой стрелке, сила Архимеда — против; плечи равны горизонтальным расстояниям $\ell$ и $\frac{4}{3}\ell$:

$$mg \cdot \ell = F_A \cdot \frac{4}{3}\ell \;\Rightarrow\; \rho_0 g\, ab\, s \cdot \ell = \rho g \frac{ab}{2} s \cdot \frac{4}{3}\ell.$$

Сократим $g\, ab\, s\, \ell$ (всё это не равно нулю): $\rho_0 = \dfrac{2}{3}\rho$.

**5. Плотность.**

$$\boxed{\rho_0 = \frac{2}{3}\rho = \frac{2}{3} \cdot 1 \text{ г/см}^3 \approx 0{,}67 \text{ г/см}^3}.$$

Результат не зависит от $a$ и $b$: нужно только, чтобы диагональ $LR$ была на уровне воды.

**Второй способ.** Запишем условие равновесия по вертикали: $T + F_A = mg$, откуда $T = mg - F_A$. Теперь моменты относительно точки $O$: нить тянет вверх в точке $P$ на расстоянии $\ell$ слева от $O$ (момент $T\ell$ по часовой стрелке), а сила Архимеда — в точке $G$ справа на расстоянии $\ell/3$ (момент $F_A\ell/3$ против часовой); сила тяжести приложена в $O$, её момент равен нулю. Равенство моментов $T\ell = F_A\ell/3$ с $T = mg - F_A$ даёт $mg = \frac{4}{3}F_A$ — то же самое уравнение, $\rho_0 ab = \frac{4}{3}\rho\frac{ab}{2}$, и тот же ответ $\rho_0 = \frac{2}{3}\rho$.

**Обратите внимание.** Сила Архимеда приложена не в центре бруска, а в центре погружённого треугольника — именно из-за смещения точек приложения моменты не совпадают. Если принять, что она приложена в $O$, плечи станут равными, и получится $\rho_0 = \frac{1}{2}\rho$ — неверно.

**Проверка.** Размерность: плотность через плотность воды, безразмерный множитель $\frac{2}{3}$. Предел: если бы всё сечение было под водой, получилось бы $\rho_0 = \rho$ (плавающее тело); здесь под водой половина, и плотность меньше, чем $\rho$. Натяжение нитей $T = mg - F_\text{A} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\rho g\, ab\, s = \frac{1}{6}\rho g\, ab\, s > 0$, нить натянута, как и должно быть для висящего бруска.

Смысл: половина бруска в воде, но сила Архимеда приложена дальше от нити, чем сила тяжести (плечо $\frac{4}{3}\ell$ против $\ell$), поэтому её момент уравновешивает более тяжёлый брусок: плотность больше половины плотности воды.

**Ответ.** $\rho_0 = \dfrac{2}{3}\rho \approx 0{,}67$ г/см$^3$.