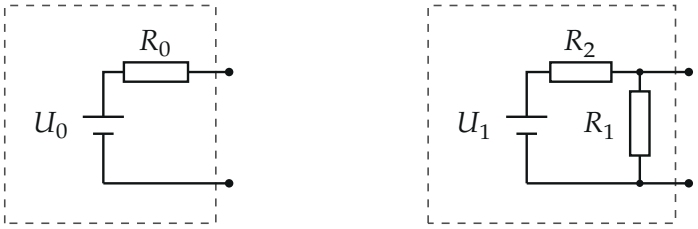
Чёрный ящик с батарейкой и резистором

Задача 8. [МОШ 2014/15, 9 класс, задача 8] В «чёрном ящике» находится схема, состоящая из последовательно соединённых идеальной батарейки с напряжением $U_0 = 3{,}3$ В и резистора сопротивлением $R_0 = 1500$ Ом (рисунок слева). При попытке изготовить второй такой же «чёрный ящик» оказалось, что батареек с нужным напряжением 3,3 В в лаборатории больше нет, зато есть другая идеальная батарейка с напряжением $U_1 = 5$ В. По этой причине решили собрать схему, состоящую из имеющейся батарейки и двух резисторов, соединив эти элементы так, как изображено на рисунке справа. Найдите, какими должны быть сопротивления резисторов R_1 и R_2 для того, чтобы два этих «чёрных ящика» оказались эквивалентными друг другу.



Слева — первый ящик (батарейка U_0 и резистор R_0), справа — второй (батарейка U_1 и два резистора).

▲ **Решение. Что происходит.** Два ящика эквивалентны, если снаружи их не различить: при любом подключённом к зажимам устройстве напряжение и ток одинаковы. Первый ящик — «батарейка с внутренним сопротивлением»: напряжение U_0 и сопротивление R_0. Значит, второй ящик должен давать то же напряжение на разомкнутых зажимах и тот же ток при замкнутых накоротко. Это два условия на два неизвестных R_1 и R_2. В конце проверим эквивалентность при произвольной нагрузке.

Обозначения. $U_{\text{хх}}$ — напряжение на разомкнутых зажимах (холостой ход); $I_{\text{кз}}$ — ток при замкнутых накоротко зажимах; $R_{\text{н}}$ — произвольная нагрузка, подключённая к зажимам.

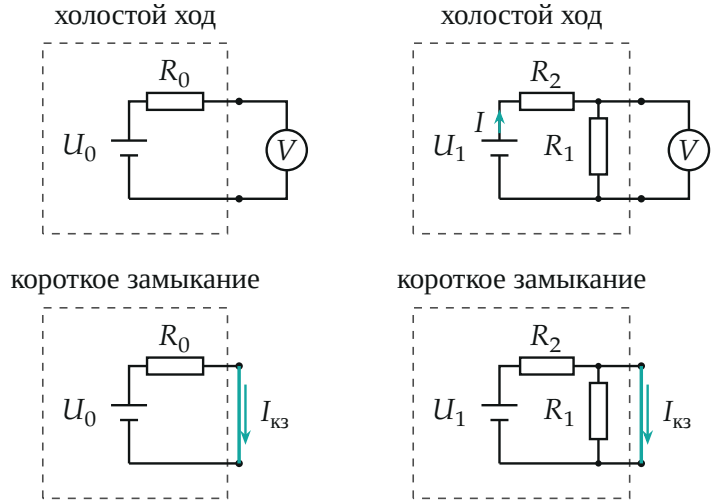
1. Первый ящик. При холостом ходе тока нет, на резисторе R_0 напряжение равно нулю, и на зажимах — напряжение батарейки: $U_{\text{хх}} = U_0$. При коротком замыкании зажимы соединены проводом, всё напряжение батарейки приложено к R_0 (закон Ома для участка цепи): $I_{\text{кз}} = \dfrac{U_0}{R_0}$.

2. Второй ящик. Холостой ход: ток идёт через R_2 и R_1, соединённые последовательно, $I = \dfrac{U_1}{R_1 + R_2}$; напряжение на зажимах равно напряжению на R_1 (зажимы присоединены к его концам):

$$U_{\text{хх}} = IR_1 = \frac{U_1 R_1}{R_1 + R_2}.$$

Короткое замыкание: провод между зажимами шунтирует R_1 (ток идёт по проводу, а не через R_1: напряжение на нём нулевое), остаётся один резистор R_2:

$$I_{\text{кз}} = \frac{U_1}{R_2}.$$



Сверху — холостой ход (вольтметр на зажимах), снизу — короткое замыкание (бирюзовый провод между зажимами).

3. Равенство характеристик. Приравниваем напряжения холостого хода и токи короткого замыкания:

$$\frac{U_1R_1}{R_1+R_2}=U_0, \qquad \frac{U_1}{R_2}=\frac{U_0}{R_0}.$$

Из второго уравнения сразу $R_2=\dfrac{R_0U_1}{U_0}$. Из первого: $U_1R_1=U_0R_1+U_0R_2$, то есть $R_1(U_1-U_0)=U_0R_2$; подставляем R_2:

$$R_1=\frac{U_0}{U_1-U_0}\cdot\frac{R_0U_1}{U_0}=\frac{R_0U_1}{U_1-U_0}.$$

4. Числа.

$$R_2=\frac{1500\cdot5}{3{,}3}\text{ Ом}\approx2{,}3\text{ кОм}, \qquad R_1=\frac{1500\cdot5}{5-3{,}3}\text{ Ом}\approx4{,}4\text{ кОм}.$$

Здесь R_2 — резистор, последовательный с батарейкой, R_1 — параллельный зажимам, как на рисунке. В ответе организаторов при тех же формулах числа переставлены ($R_1\approx2{,}3$, $R_2\approx4{,}4$ кОм) — это опечатка: такие ящики дали бы на холостом ходу $5\cdot\frac{2{,}3}{6{,}7}\approx1{,}7$ В, а не 3,3 В.

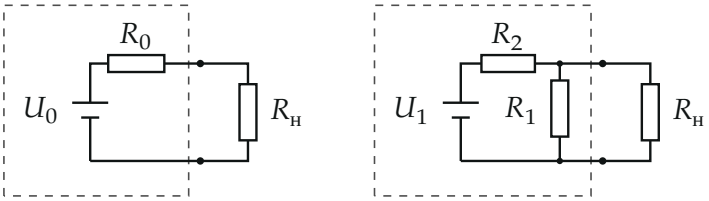
5. Эквивалентность при любой нагрузке. Два режима — холостой ход и короткое замыкание — определяют R_1 и R_2; докажем, что при найденных значениях ящики неотличимы и при произвольной нагрузке $R_н$, присоединённой к зажимам. Для первого ящика напряжение на нагрузке $U=\dfrac{U_0R_н}{R_0+R_н}$. Во втором нагрузка параллельна R_1; их общее сопротивление $R_п=\dfrac{R_1R_н}{R_1+R_н}$ включено последовательно с R_2, поэтому

$$U=\frac{U_1R_п}{R_2+R_п}=\frac{U_1R_1R_н}{R_2(R_1+R_н)+R_1R_н}=\frac{U_1R_1R_н}{R_1R_2+(R_1+R_2)R_н}.$$

Поделим числитель и знаменатель на $R_1 + R_2$:

$$U = \frac{\dfrac{U_1 R_1}{R_1 + R_2} R_н}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_н}.$$

Здесь $\dfrac{U_1 R_1}{R_1 + R_2} = U_0$ (первое уравнение пункта 3), а $\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_0$ (из первого уравнения $R_1 + R_2 = \frac{U_1 R_1}{U_0}$, и по второму $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 U_0}{U_1} = R_0$), то есть $U = \dfrac{U_0 R_н}{R_0 + R_н}$ — как в первом ящике.



Нагрузка $R_н$ на зажимах обоих ящиков: ток и напряжение на ней одинаковы.

Обратите внимание. Внутреннее сопротивление второго ящика — не $R_1 + R_2$, а R_1 и R_2, соединённые параллельно (идеальная батарейка сопротивления не вносит); именно оно должно равняться R_0.

Проверка. Размерность: $\frac{R_0 U_1}{U_0}$ — ом. Холостой ход: $5 \cdot \frac{4410}{4410+2270} = 3{,}30$ В $= U_0$. Внутреннее сопротивление: $\frac{4410 \cdot 2270}{4410+2270} = 1500$ Ом $= R_0$. Нагрузка $R_н = 1000$ Ом: в первом ящике ток $\frac{3{,}3}{2500} = 1{,}32$ мА, во втором напряжение на нагрузке $5 \cdot \frac{815}{2270+815} = 1{,}32$ В, то есть тоже 1,32 мА (815 Ом — R_1 и $R_н$ параллельно). Предел: если $U_1 \to U_0$, то $R_1 \to \infty$ (параллельный резистор не нужен) и $R_2 \to R_0$, как и должно быть.

Смысл: делитель превращает 5 В в 3,3 В, а его параллельное сопротивление служит внутренним сопротивлением нового источника.

Ответ. $R_1 = \dfrac{R_0 U_1}{U_1 - U_0} \approx 4{,}4$ кОм (параллельный зажимам), $R_2 = \dfrac{R_0 U_1}{U_0} \approx 2{,}3$ кОм (последовательный с батарейкой).