# Табуретка и доливаемое ведро

**Задача 1.** [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 1] На горизонтальном полу стоит табуретка массой $M = 4{,}5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между её ножками $d = 30$ см. Коэффициент трения между ножками и полом $\mu = 0{,}4$. Экспериментатор Глюк привязал к середине стороны сиденья табуретки невесомую нерастяжимую нить, перекинутую через блок (см. рис). На втором конце нити висит ведёрко с водой. Масса ведёрка вместе с водой равна $m = 0{,}6$ кг. Экспериментатор Глюк опустил в ведёрко тонкую трубку с внутренним диаметром $D = 4$ мм, по которой в ведёрко стала доливаться вода с постоянной скоростью $v = 0{,}2$ м/с. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м$^3$, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с$^2$. Через какое время после этого табуретка придёт в движение? Как начнёт двигаться табуретка: скользить, двигаясь поступательно, или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси?

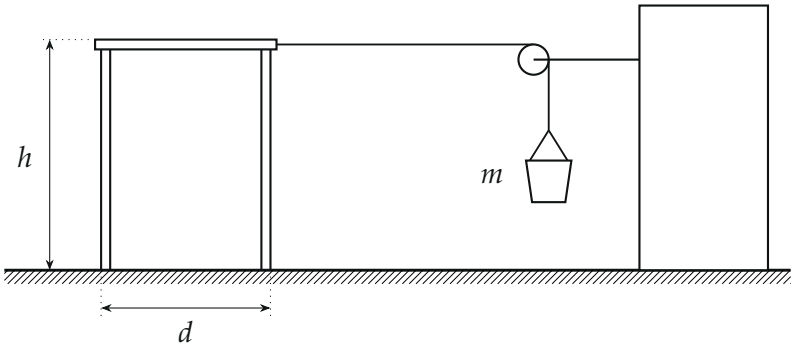



*Рисунок условия*

▲ **Решение. Что происходит.** Нить тянет табуретку горизонтально за верхний край сиденья, а чем больше воды в ведёрке, тем сильнее натяжение. Табуретка может «сдаться» двумя способами: поехать по полу, когда сила натяжения превысит наибольшую силу трения, или повернуться вокруг двух ножек, ближних к блоку, когда момент силы натяжения превысит момент силы тяжести. Какой порог ниже, тот и сработает

раньше. Это задача на равновесие тела с трением на пределе: для каждого способа находим предельное натяжение, затем сравниваем их и по ним определяем нужную массу воды.

**Обозначения.** $T$ — сила натяжения нити; $N$ — суммарная сила реакции пола на все ножки; $F_{\text{тр}}$ — суммарная сила трения пола; $m_{\text{в}}$ — масса ведёрка вместе с водой в данный момент; $S = \pi D^2/4$ — сечение трубки; $\Delta m$ — масса долитой воды; $T_{\text{ск}}$ и $T_{\text{оп}}$ — натяжение, при котором табуретка начнёт скользить или опрокидываться.

**1. Натяжение нити.** Вода доливается медленно, ведёрко висит неподвижно: второй закон Ньютона для ведёрка с водой в проекции на вертикаль даёт $T = m_{\text{в}}g$. Блок и нить невесомы, трения нет, поэтому такая же сила $T$ действует на табуретку, причём горизонтально: нить подходит к сиденью горизонтально.

**2. Когда табуретка начнёт скользить.** На табуретку действуют: сила тяжести $Mg$ вниз, реакция пола $N$ вверх, натяжение $T$ вправо, к блоку, и трение $F_{\text{тр}}$ влево (рис. 2). Покой по вертикали: $N = Mg$. Покой по горизонтали: $F_{\text{тр}} = T$. Трение покоя не больше $\mu N$, поэтому скольжение начнётся, когда $T$ достигнет

$$T_{\text{ск}} = \mu N = \mu Mg = 0{,}4 \cdot 4{,}5 \cdot 10 = 18 \text{ Н}.$$

**3. Когда табуретка начнёт опрокидываться.** Опрокидывание — это поворот вокруг линии, по которой табуретка касается пола ближними к блоку ножками (точка $O$ на рис. 2). Перед поворотом левые ножки перестают давить на пол, и вся реакция $N$ приложена к правым ножкам, то есть в точке $O$. Сила трения тоже действует на уровне пола в точке $O$. Значит, относительно $O$ моменты $N$ и $F_{\text{тр}}$ равны нулю, а остаются два: нить стремится повернуть табуретку вправо, момент $Th$, а сила тяжести, приложенная к центру масс над серединой табуретки, на плече $d/2$ возвращает её, момент $Mg\,d/2$. Предельное равновесие:

$$T_{\text{оп}}\,h = Mg\,\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{оп}} = \frac{Mgd}{2h} = \frac{4{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}30}{2 \cdot 0{,}45} = 15 \text{ Н}.$$

Проверка вторым способом — моменты относительно центра масс: па-

ра сил $T$ и $F_{тр} = T$ имеет плечо $h$, пара $N$ и $Mg$ — плечо $d/2$, и условие то же, $Th = Mg\,d/2$.

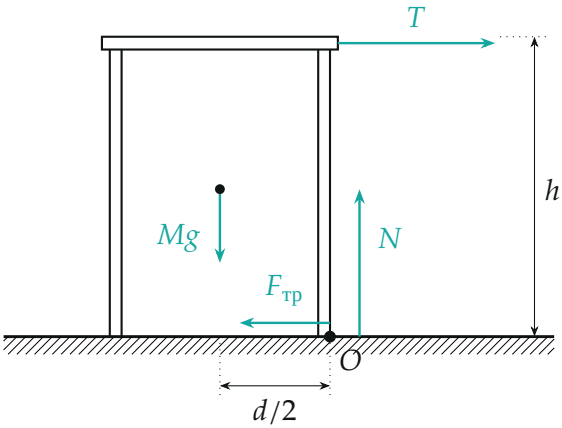



*Рис. 2. Силы, действующие на табуретку, в момент начала опрокидывания (боковой вид)*

**4. Что наступит раньше.** $T_{оп} = 15$ Н $< T_{ск} = 18$ Н: натяжение растёт от $mg = 6$ Н, и порог опрокидывания будет достигнут раньше. При $T = 15$ Н сила трения $F_{тр} = 15$ Н ещё меньше предельной 18 Н, поэтому скольжения нет: табуретка начнёт опрокидываться, поворачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через две ножки, ближние к блоку.

**5. Сколько воды надо долить.** К моменту опрокидывания масса ведёрка с водой $m_в = T_{оп}/g = Md/(2h) = 1{,}5$ кг, значит, долить нужно

$$\Delta m = \frac{Md}{2h} - m = 1{,}5 - 0{,}6 = 0{,}9 \text{ кг}.$$

**6. Время.** За время $t$ через трубку проходит цилиндр воды длиной $vt$ и сечением $S = \pi D^2/4$, его масса $\Delta m = \rho S v t$. Отсюда

$$t = \frac{\Delta m}{\rho S v} = \frac{4\Delta m}{\rho v \pi D^2} = \frac{4}{\rho v \pi D^2}\left(\frac{Md}{2h} - m\right)$$
$$= \frac{4 \cdot 0{,}9}{1000 \cdot 0{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot (4 \cdot 10^{-3})^2} \text{ с} \approx 358 \text{ с} \approx 5 \text{ мин } 58 \text{ с}.$$

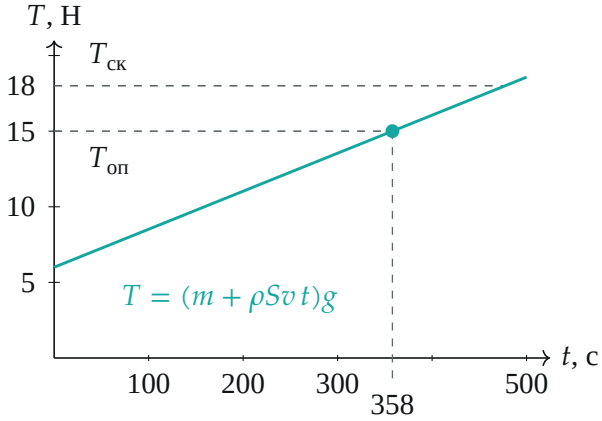



*Рис. 3. Натяжение нити растёт со временем и сначала достигает порога опрокидывания*

**Обратите внимание.**

- Опрокидывание и скольжение сравниваем по одной величине — натяжению нити: у каждого свой предельный порог, срабатывает меньший.
- Нить тянет горизонтально, поэтому $N = Mg$ и не зависит от $T$: предел трения $\mu Mg$ постоянный.
- Сечение трубки — $\pi D^2/4$ с *диаметром*; $D$ в формуле берём в метрах.

**Проверка.**

- Размерность: $\dfrac{\text{кг}}{(\text{кг/м}^3)\,(\text{м/с})\,\text{м}^2} = \text{с}$.
- Расход воды $\rho S v \approx 2{,}5$ г/с, а долить надо 0,9 кг: $0{,}9/0{,}0025 \approx 360$ с, порядок верный. Начальное натяжение $mg = 6$ Н меньше 15 Н, так что в начале табуретка спокойно стоит.
- Предел: при $d \to 0$ (ножки сведены в точку) $T_{\text{оп}} \to 0$, табуретка падает от малейшей силы.

Физический смысл: у высокой узкой табуретки точка приложения силы высоко, плечо $h$ велико, поэтому поворот наступает раньше скольжения; у низкой и широкой она сначала поехала бы.

**Ответ.** Табуретка начнёт опрокидываться (раньше, чем скользить:

$T_{\text{оп}} = 15$ Н $< T_{\text{ск}} = 18$ Н) — вращением вокруг оси через две ножки, ближние к блоку; это произойдёт через время $t = \dfrac{4}{\rho v \pi D^2}\left(\dfrac{Md}{2h} - m\right) \approx 358$ с $\approx 5$ мин 58 с.