# Электромобиль на наклонной плоскости

**Задача 2.** [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 2] По наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, едет с постоянной скоростью $v = 1$ м/с игрушечный автомобиль, масса которого равна $M = 300$ г. Автомобиль связан лёгкой нитью, перекинутой через невесомый блок, с грузом массой $m = 200$ г, который движется вертикально. Автомобиль приводится в движение электромотором, который питается от батарейки. КПД электромотора при таком движении равен $\eta = 60\%$. Найдите количество теплоты, выделяющееся при протекании тока через обмотки электромотора за время $t = 2{,}5$ с. Автомобиль движется без проскальзывания, трением в осях и сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с$^2$.

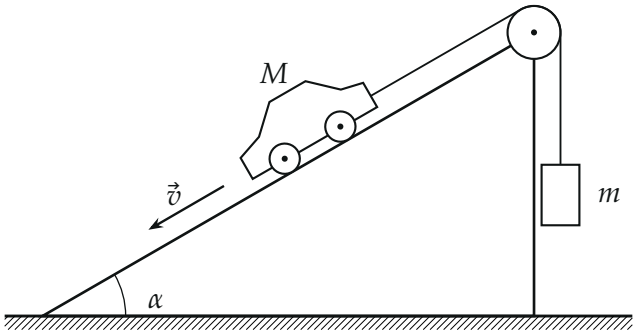



*Рисунок условия*

▲ **Решение. Что происходит.** Автомобиль съезжает вниз по наклонной плоскости с постоянной скоростью и тянет за нить груз вверх; тянет его мотор. Скорость не меняется, поэтому кинетическая энергия постоянна, а меняются только потенциальные энергии автомобиля и груза. Груз поднимается на весь пройденный путь, а автомобиль опускается лишь на его долю $\sin\alpha$, поэтому механическая энергия системы растёт за счёт работы мотора. Энергия батарейки идёт на эту работу и на нагрев обмоток, а КПД связывает эти две доли. Это задача на закон сохранения энергии с учётом потерь.

**Обозначения.** $s = vt$ — путь автомобиля вдоль наклона (и высота подъёма груза); $\Delta E$ — изменение механической энергии системы автомобиль + груз; $A_{\text{пол}}$ — полезная работа мотора; $W$ — энергия, взятая у батарейки; $Q$ — выделившаяся теплота.

**1. Перемещения тел.** Нить нерастяжима, поэтому груз движется с той же по модулю скоростью, что и автомобиль. За время $t$ каждое тело проходит путь $s = vt = 2{,}5$ м: автомобиль вниз вдоль наклона, груз вертикально вверх. Автомобиль при этом опускается на высоту $s\sin\alpha$, груз поднимается на $s$ (рис. 2).

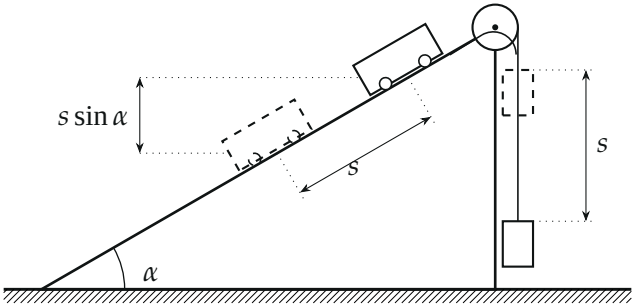



*Рис. 2. Автомобиль спускается на $s\sin\alpha$, груз поднимается на $s$ (положение в конце — пунктиром)*

**2. Изменение механической энергии.** Скорости постоянны, кинетическая энергия не меняется. Потенциальная энергия автомобиля уменьшается на $Mgs\sin\alpha$, груза — увеличивается на $mgs$. Нить лёгкая, блок невесомый: они энергию не накапливают, работа нити над автомобилем и над грузом одинакова по модулю и противоположна по знаку. Поэтому

$$\Delta E = mg\,vt - Mg\,vt\sin\alpha = gvt\,(m - M\sin\alpha)$$
$$= 10 \cdot 1 \cdot 2{,}5 \cdot (0{,}2 - 0{,}15) = 1{,}25 \text{ Дж}.$$

Он положителен: груз тяжелее «скатывающей» составляющей, механическая энергия системы растёт.

**3. Полезная работа мотора.** Единственный источник прироста механической энергии — мотор. Сила реакции плоскости перпендикулярна скорости, трения скольжения нет, сила сцепления колёс с плоскостью

работы не совершает (колесо катится без проскальзывания, точка касания неподвижна). Значит, полезная работа мотора равна приросту механической энергии: $A_{\text{пол}} = \Delta E$.

**4. КПД и баланс энергии.** КПД — отношение полезной работы к энергии $W$, взятой у батарейки: $\eta = A_{\text{пол}}/W$, откуда $W = \Delta E/\eta = 1{,}25/0{,}6 \approx 2{,}08$ Дж. Закон сохранения энергии для мотора: взятая у батарейки энергия идёт на полезную работу и на нагрев обмоток, $W = A_{\text{пол}} + Q$ (рис. 3). Тогда

$$Q = W - A_{\text{пол}} = \Delta E\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) = gvt\,(m - M\sin\alpha)\,\frac{1-\eta}{\eta}$$
$$= 1{,}25 \cdot \frac{0{,}4}{0{,}6} \approx 0{,}83 \text{ Дж}.$$

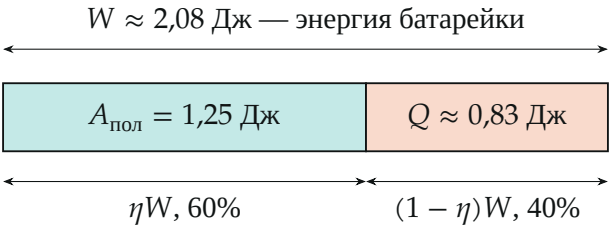



*Рис. 3. На что тратится энергия батарейки за время $t = 2{,}5$ с*

**5. Проверка вторым способом — силами и мощностью.** Оси: $x$ вдоль наклона вниз, по скорости автомобиля, $y$ перпендикулярно наклону; для груза ось вертикально вверх. На автомобиль действуют (рис. 4): сила тяжести $Mg$, реакция $N$, натяжение нити $T$ вверх вдоль наклона и сила сцепления $F$ ведущих колёс с плоскостью, направленная вниз вдоль наклона. Скорости постоянны, ускорений нет. Для автомобиля в проекции на $x$: $Mg\sin\alpha + F - T = 0$; для груза: $T - mg = 0$. Отсюда

$$F = T - Mg\sin\alpha = mg - Mg\sin\alpha = 2 - 1{,}5 = 0{,}5 \text{ Н}.$$

Механическая мощность мотора $P_{\text{пол}} = Fv = 0{,}5$ Вт, мощность батарейки $P = P_{\text{пол}}/\eta \approx 0{,}83$ Вт, мощность нагрева $P - P_{\text{пол}} \approx 0{,}33$ Вт, за $t = 2{,}5$ с получаем $Q \approx 0{,}83$ Дж. Совпало.

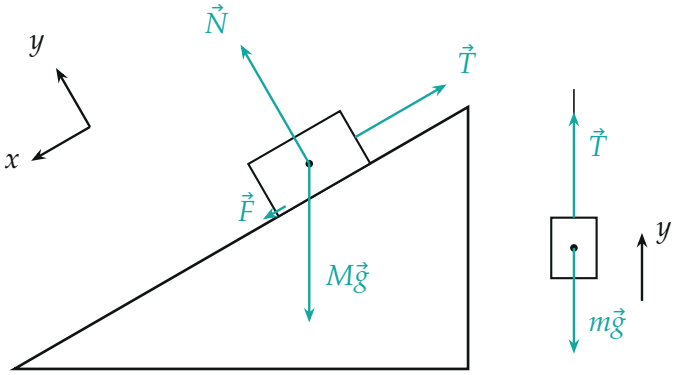



*Рис. 4. Силы на автомобиль и на груз при равномерном движении*

**Обратите внимание.**

- Механическая энергия системы *растёт*: $m > M\sin\alpha$. Если бы было наоборот, автомобиль спускался бы, а мотор работал как генератор, и $\eta$ означало бы другое.
- Не надо искать работу силы тяги колёс по формуле $F \cdot s$ на каждом колесе: она не работа по перемещению точки касания. Полезная работа мотора — это прирост механической энергии системы.
- $\eta = 60\%$ — доля от энергии *батарейки*, а не от тепла: $Q = W - A_{\text{пол}} = 0{,}4\,W$, а не $0{,}4\,A_{\text{пол}}$.

**Проверка.**

- Размерность: $\text{м/с}^2 \cdot \text{м/с} \cdot \text{с} \cdot \text{кг} = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}$.
- Предел $\eta \to 100\%$: $Q \to 0$, вся энергия батарейки идёт в механику. При $\eta \to 0$ получаем $Q \to \infty$ — мотор лишь греется.
- Доли: $Q/W = 0{,}4 = 1 - \eta$, как должно быть.

Физический смысл: тепла выделяется в $(1-\eta)/\eta = 2/3$ от полезной работы, а сама полезная работа — это поднять груз на 2,5 м и опустить автомобиль на 1,25 м.

**Ответ.** $Q = gvt\,(m - M\sin\alpha)\,\dfrac{100\% - \eta}{\eta} \approx 0{,}83$ Дж.