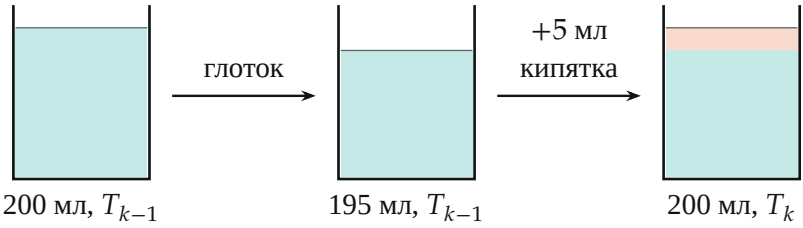
Горячая вода в кружке по глоткам

Задача 3. [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 3] Десятиклассник Вася проводит домашний эксперимент. Он налил в кружку 200 мл воды (до краёв) при температуре +20 °C. Затем он отпивает один маленький глоток (5 мл), тут же доливает в чашку кипяток до краёв, аккуратно перемешивает содержимое чашки очень лёгкой пластиковой ложечкой (не расплёскивая содержимого) и повторяет описанную процедуру много раз. Максимальная температура воды, которую Вася ещё может проглотить, не рискуя обжечься, равна +60 °C. Сколько воды выпьет Вася до конца своего эксперимента?



Один шаг эксперимента: глоток, доливание кипятка, перемешивание (уровни не в масштабе)

▲ **Решение. Что происходит.** В каждом шаге температура воды в кружке немного растёт: убирается глоток воды, на его место приходит такой же объём кипятка. Пока вода в кружке не горячее 60 °C, Вася пьёт. Разность между температурой кипятка и температурой воды в кружке на каждом шаге умножается на одно и то же число, меньшее единицы, то есть убывает как геометрическая прогрессия; нам нужно найти, сколько шагов можно сделать, пока температура не перейдёт 60 °C. Класс задачи: тепловой баланс при смешивании и геометрическая прогрессия.

Обозначения. $V = 200$ мл — объём воды в кружке; $\delta = 5$ мл — объём глотка и порции кипятка; $T_h = 100$ °C — температура кипятка; T_k — температура в кружке после k-го доливания и перемешивания, $T_0 = 20$ °C; $q = \dfrac{V-\delta}{V} = \dfrac{195}{200} = 0{,}975$. Теплоёмкостью кружки и ложечки и потерями тепла пренебрегаем, объёмы складываются, плотность и удельная теплоёмкость воды одинаковы для воды любой температуры.

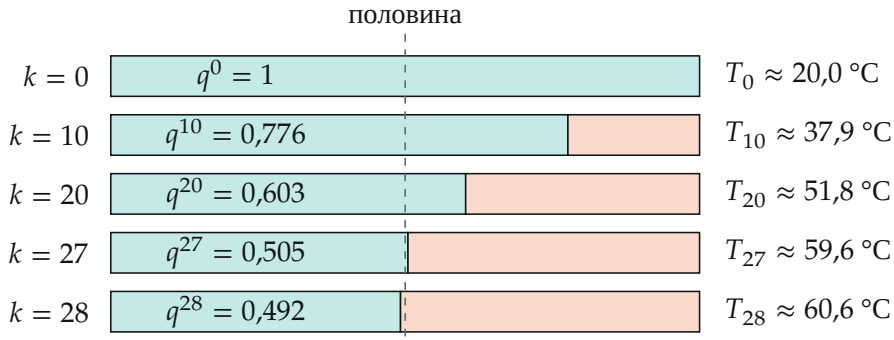
1. Один шаг. Перед k-м глотком в кружке 200 мл воды при T_{k-1}. После глотка остаётся 195 мл при той же температуре, потому что Вася отпил воду, которая была в кружке. В кружку доливают 5 мл воды при T_h и перемешивают; установилась температура T_k. Тепловой баланс (кипяток остывает от T_h до T_k, остальная вода нагревается от T_{k-1} до T_k; потерь нет, c — удельная теплоёмкость воды, ρ — плотность):

$$c\rho \cdot 195\,(T_k - T_{k-1}) = c\rho \cdot 5\,(T_h - T_k) \quad \Rightarrow$$
$$T_h - T_k = \frac{195}{200}\,(T_h - T_{k-1}) = q\,(T_h - T_{k-1}).$$

2. Прогрессия. Из соотношения шага получаем, что $T_h - T_k$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем q:

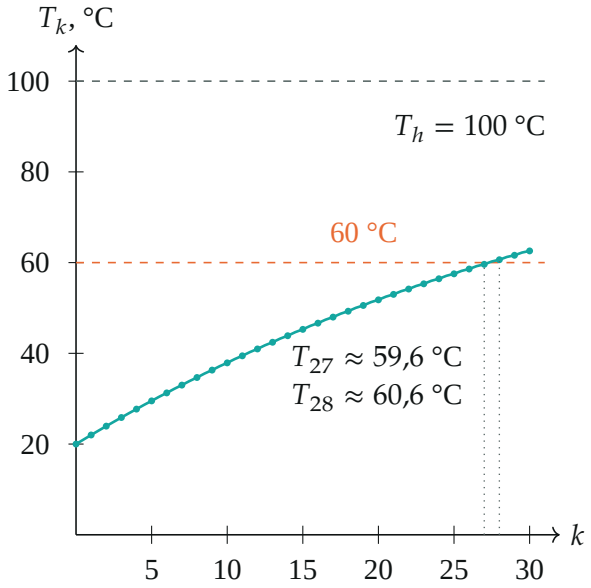
$$T_h - T_k = q^k\,(T_h - T_0), \qquad T_k = 100 - 80 \cdot 0{,}975^k\ (^\circ\text{C}).$$

Доля исходной воды после k шагов равна q^k (первый рисунок ниже), график температуры — на втором.



исходная вода (бирюзовая) делит кружку пополам при $k \approx 27{,}4$

Состав воды в кружке после k шагов: бирюзовая часть — исходная вода, её доля q^k (число в полосе); оранжевая — кипяток. На 27-м шаге исходной воды ещё чуть больше половины, на 28-м уже меньше.



Температура в кружке после k-го доливания: после 27-го ещё меньше 60 °C, после 28-го уже больше

3. Когда вода станет слишком горячей. Вася может выпить воду, если $T \le 60$ °C, то есть

$$100 - 80 \cdot 0{,}975^k \le 60 \;\Leftrightarrow\; 0{,}975^k \ge \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; k \le \frac{\ln 2}{\ln(1/0{,}975)} \approx 27{,}4.$$

Значит, после $k = 27$ доливаний $T_{27} \approx 59{,}6$ °C ещё можно пить, после $k = 28$ получается $T_{28} \approx 60{,}6$ °C — уже нельзя.

4. Сколько глотков. Каждый глоток Вася делает *до* очередного доливания, из воды с температурой $T_0, T_1, \ldots, T_{27}$, и все эти температуры не выше 60 °C. Глоток при $T_{27} \approx 59{,}6$ °C — 28-й; после него доливание даёт $T_{28} > 60$ °C, и эксперимент заканчивается. Всего Вася делает 28 глотков, в сумме

$$28 \cdot 5 \text{ мл} = 140 \text{ мл}.$$

Организаторы получили 135 мл (27 глотков): они приравняли число глотков к числу доливаний $k \le 27$. Но Вася делает глоток и перед самым первым доливанием, поэтому глотков на один больше.

Обратите внимание.

- Глоток выпивается *до* доливания: первый — ещё из воды при 20 °C, а последний, 28-й, — из воды при 59,6 °C. Вода при 60,6 °C уже недопустима, но её никто и не пьёт.
- Доля исходной холодной воды падает не на $5/200$ от *начальной* воды, а на $5/200$ от *оставшейся*: умножение на 0,975, а не вычитание.

Проверка.

- При $k \to \infty$ имеем $T_k \to 100$ °C: кружка заполняется кипятком, как и должно быть.
- Первые шаги: $T_1 = (195 \cdot 20 + 500)/200 = 22$ °C, $T_2 = 23{,}95$ °C — совпадает с $100 - 80 \cdot 0{,}975^k$.
- Баланс по долям: после k шагов исходной воды осталась доля q^k, остальное — кипяток; энергия складывается, поэтому $T_k = 20\,q^k + 100\,(1 - q^k)$, как и выше.

Физический смысл: чтобы нагреть воду до 60 °C, нужно заменить половину исходной холодной воды, а за каждый шаг заменяется только 2,5%, поэтому нужно около 27 доливаний.

Ответ. Вася сделает 28 глотков (последний — при $T_{27} \approx 59{,}6$ °C) и выпьет $28 \cdot 5 = 140$ мл воды. (Организаторы дают 135 мл: они не учли глоток, сделанный до первого доливания.)