Пробка вылетает из колбы с гелием

Задача 4. [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 4] В колбе объёмом $V = 2$ л при комнатной температуре находится $\nu = 0{,}1$ моля гелия. Горлышко колбы имеет длину $l = 2$ см и сечение $S = 10$ см^2. Это горлышко закрыто цилиндрической пробкой массой $m = 10$ г, могущей скользить по нему без трения. В начальный момент пробка удерживается у основания горлышка, и гелий не выходит наружу. Пробку отпускают, и она вылетает из горлышка со скоростью $v = 10$ м/с. Найдите изменение ΔT температуры гелия в колбе к моменту вылета пробки из горлышка. Давление воздуха в комнате равно $p_0 = 1$ атм, теплообменом гелия в колбе с окружающими телами за время вылета пробки можно пренебречь.

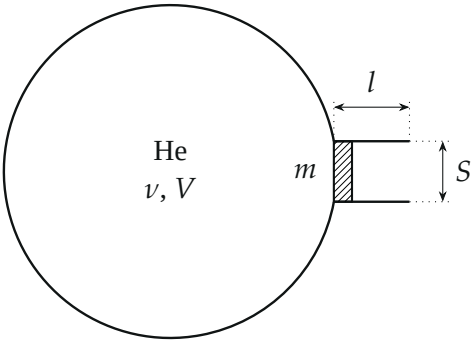


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Гелий в колбе выталкивает пробку: он расширяется, но почти мгновенно, так что обмена теплом с окружающими телами нет. Работу газа делят две «статьи»: пробка получает кинетическую энергию, и ещё пробка вытесняет воздух комнаты, поэтому газ совершает работу против атмосферного давления. Всё это оплачивается внутренней энергией гелия, поэтому гелий охлаждается. Нам нужен закон сохранения энергии для системы «гелий + пробка». Класс задачи: первое начало термодинамики для одноатомного идеального газа.

Обозначения. T — температура гелия; $U = \frac{3}{2}\nu RT$ — его внутренняя энергия (гелий одноатомный); p — давление гелия; $A_г$ — работа гелия

над пробкой; $A_{ат} = p_0 Sl$ — работа против силы давления атмосферы; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К); $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па.

1. Как движется пробка. Пробка движется вдоль горизонтального горлышка на расстояние l от основания до края (рис. 2). На неё действуют изнутри сила давления гелия pS вправо, снаружи — сила давления воздуха $p_0 S$ влево. Трения нет, сила тяжести вертикальна и работу не совершает; реакция стенок перпендикулярна движению.

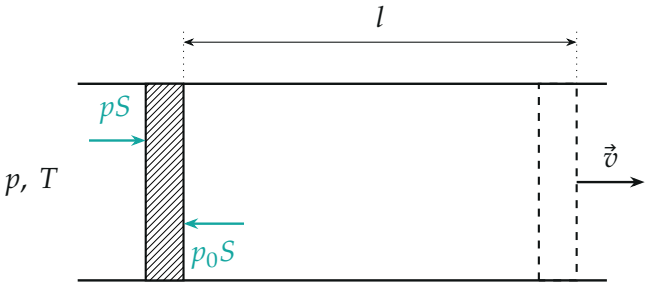


Рис. 2. Пробка у основания горлышка и в конце пути (пунктир)

2. Что получает пробка. Теорема об изменении кинетической энергии для пробки: работа силы давления гелия $A_г$ и работа силы давления воздуха ($-p_0 S \cdot l$, сила против движения, постоянная) идут в кинетическую энергию $\frac{1}{2}mv^2$:

$$A_г - p_0 Sl = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad A_г = \frac{mv^2}{2} + p_0 Sl.$$

Давление гелия меняется по ходу движения, но нам нужна только эта работа, а не закон изменения давления. Гелий граничит с пробкой, поэтому его работа над внешней средой — ровно $A_г$.

3. Первое начало термодинамики для гелия. Теплообмена нет, $Q = 0$, поэтому изменение внутренней энергии равно работе, совершённой над гелием, то есть $\Delta U = -A_г$. Для одноатомного идеального газа $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\,\Delta T$. Тогда

$$\frac{3}{2}\nu R\,\Delta T = -\left(\frac{mv^2}{2} + p_0 Sl\right).$$

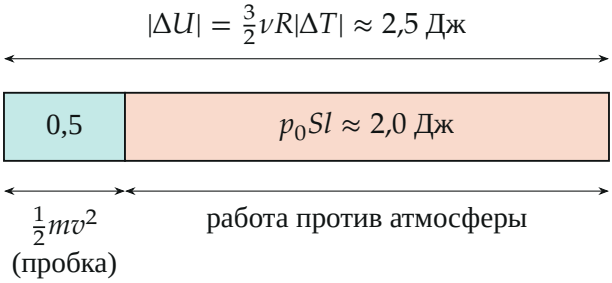


Рис. 3. Куда уходит убыль внутренней энергии гелия

4. Ответ. Выражаем изменение температуры и считаем ($p_0 Sl = 1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}02 \approx 2{,}02$ Дж, $mv^2/2 = 0{,}5$ Дж):

$$\Delta T = -\frac{mv^2 + 2p_0 Sl}{3\nu R} = -\frac{1{,}0 + 4{,}04}{3 \cdot 0{,}1 \cdot 8{,}31}\ \text{К} \approx -2\ \text{К}.$$

Гелий охладился примерно на 2 К.

Обратите внимание.

- Не забывайте работу против атмосферного давления $p_0 Sl$: она больше кинетической энергии пробки (2,0 Дж против 0,5 Дж) и даёт основную часть охлаждения.
- Уравнение адиабаты $pV^\gamma = \text{const}$ не нужно: работу гелия даёт энергия пробки, а давление гелия в решении вообще не понадобилось (скорость пробки много меньше скорости звука, так что адиабата для гелия справедлива, но объём меняется всего на 1%, и она дала бы тот же результат с лишними выкладками).
- Внутренняя энергия гелия — $\frac{3}{2}\nu RT$ (одноатомный газ), а не $\frac{5}{2}\nu RT$.

Проверка.

- Размерность: $\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2}{\text{моль} \cdot \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})} = \text{К}$.
- Согласованность условия: давление гелия при $T \approx 300$ К равно $\nu RT/V \approx 1{,}25 \cdot 10^5$ Па, то есть на $0{,}25 \cdot 10^5$ Па выше атмосферного; сила превышения ≈ 25 Н на пути 2 см даёт $\approx 0{,}5$ Дж $= mv^2/2$, как и в условии (рис. 4).

- Охлаждение на 2 К от 300 К — около 0,7%, а объём газа вырос на $Sl = 20$ см^3, то есть на 1% от V: порядки сходятся.

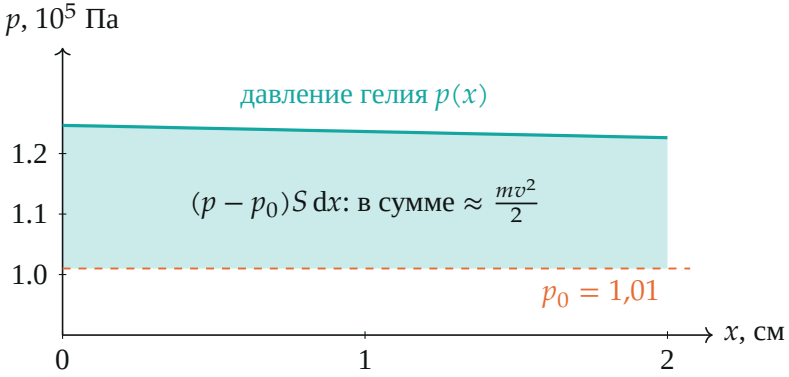


Рис. 4. Давление гелия на пути пробки (оценка по адиабате, x — путь от основания горлышка) и давление воздуха p_0. Заштрихованная площадь, умноженная на S, — кинетическая энергия пробки (порядка 0,5 Дж); давление гелия почти не меняется (1,25 → 1,23), поэтому закон его изменения и не нужен.

Физический смысл: гелий отдаёт энергию на разгон пробки и на отодвигание воздуха, а восполнить её ему нечем — теплообмена нет, потому он и остывает.

Ответ. Температура гелия понизится на $|\Delta T| = \dfrac{mv^2 + 2p_0Sl}{3\nu R} \approx 2$ К, то есть $\Delta T = -\dfrac{mv^2 + 2p_0Sl}{3\nu R} \approx -2$ К.