Две медные проволоки между клеммами

Задача 5. [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 5] На закреплённые неподвижно клеммы A и B, расстояние между которыми равно 40 см, может подаваться постоянное напряжение 0,3 В. К клеммам прикреплены две медные проволоки без изоляции, всюду имеющие круглое поперечное сечение. Одна из проволок натянута и имеет длину 40 см, а другая имеет длину 70 см. Диаметр обеих проволок 0,6 мм. Как сделать так, чтобы тепловая мощность, выделяющаяся в этой системе, была максимальной? Чему равна эта мощность? Проволоки можно приводить в электрический контакт друг с другом всеми возможными способами, но нельзя обрывать их и отсоединять концы проволок от клемм. Удельное сопротивление меди $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

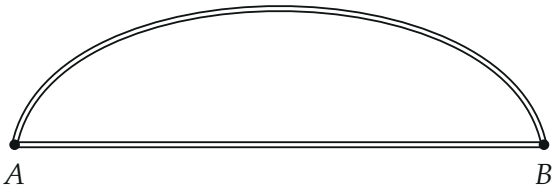


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Напряжение между клеммами задано, а выделяющаяся мощность $P = U^2/R$ тем больше, чем меньше сопротивление R всей системы между A и B. Значит, проволоки надо соединить так, чтобы сопротивление было наименьшим, то есть чтобы как можно больше длины проволоки работало параллельно. Если куски проволок лежат рядом и касаются друг друга по всей длине, то в каждом сечении они имеют один и тот же потенциал, и такой участок — как одна проволока, но с сечением в несколько раз больше. Класс задачи: параллельное соединение одинаковых проволок и поиск минимума сопротивления.

Обозначения. $r = \rho/S$ — сопротивление единицы длины проволоки, $S = \pi d^2/4$ — площадь её сечения; x — расстояние вдоль отрезка AB от клеммы A, $m(x)$ — число слоёв проволоки, лежащих в данном месте

вдоль AB (стержень AB плюс проходы второй проволоки); $L_1 = 40$ см, $L_2 = 70$ см — длины проволок.

1. Сопротивление единицы длины. Для медной проволоки

$$r = \frac{\rho}{S} = \frac{4\rho}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}}{3{,}14 \cdot (0{,}6 \cdot 10^{-3})^2} \frac{\text{Ом}}{\text{м}} \approx 0{,}060 \frac{\text{Ом}}{\text{м}}.$$

Одна натянутая проволока AB даёт $R = r \cdot 0{,}4 \approx 0{,}024$ Ом и мощность $U^2/R \approx 3{,}7$ Вт — это нижняя оценка.

2. Сопротивление слоёв. Если на участке длиной dx лежат m одинаковых проволок и они касаются друг друга по всей длине, их токи параллельны и сопротивление участка $dR = r\,dx/m$. Поэтому сопротивление всей цепи

$$R = r \int_0^{L_1} \frac{dx}{m(x)}.$$

Здесь $m(x)$ — число проходов проволок через сечение, перпендикулярное AB на расстоянии x от A. *Почему укладка вдоль AB лучше любой другой.* Мысленно соединим все проволоки в каждом таком сечении идеальной перемычкой: у тока появляются новые пути, сопротивление может только уменьшиться. После этого слой между сечениями x и $x+dx$ — параллельные куски проволок; кусок, идущий наискось или петлёй, длиннее dx и имеет сопротивление больше $r\,dx$. Поэтому при *любой* укладке $R \geq r \int_0^{L_1} dx/m(x)$, а куски проволоки за клеммами в сечения не попадают и только тратят длину. Если же все проходы лежат вдоль AB вплотную, точки одного сечения уже имеют один потенциал, перемычки ничего не меняют, и оценка достигается. Остаётся выбрать $m(x)$; проволока AB даёт один проход в каждом сечении.

3. Какие значения может принимать m. Вторая проволока идёт от A до B, поэтому в каждой точке стержня она проходит вперёд (от A к B) на один раз больше, чем назад. Если назад она проходит b раз, то вперёд $b + 1$ раз, и

$$m = 1 + (b + 1) + b = 2 + 2b, \qquad b = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Длина второй проволоки складывается из всех её проходов: L_1 +

$2\int_0^{L_1} b\,dx = L_2$, то есть $\int_0^{L_1} b\,dx = \dfrac{L_2 - L_1}{2} = 15$ см.

4. Как сделать R минимальным. Нужно сделать $\int dx/(2+2b)$ как можно меньше при $\int b\,dx = 15$ см. Функция $1/(2+2b)$ выпукла, поэтому целые значения b выгодно брать соседними — $b=0$ и $b=1$: на участке длиной 15 см положим $b=1$ ($m=4$), на остальных 25 см — $b=0$ ($m=2$). Другие укладки хуже: например, $b=2$ ($m=6$) на 7,5 см даёт $\dfrac{32{,}5}{2} + \dfrac{7{,}5}{6} = 17{,}5$ см вместо $\dfrac{25}{2} + \dfrac{15}{4} = 16{,}25$ см.

5. Укладка. Вторую проволоку от клеммы A натягиваем вдоль AB до клеммы B (40 см), затем оставшиеся 30 см складываем вдвое: 15 см проволока идёт назад вдоль AB до точки C ($AC = 25$ см), там перегибается и идёт вперёд до B, где закреплена на клемме. Все проходы прижаты друг к другу и к стержню (рис. 2).

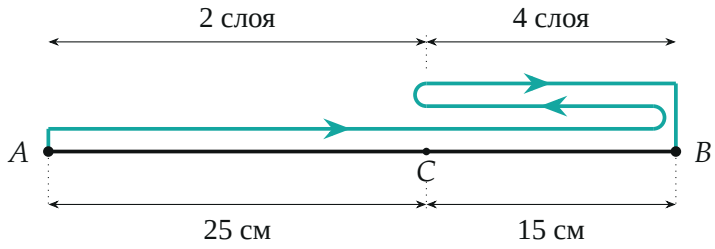


Рис. 2. Укладка проволок (слои разведены для наглядности, на самом деле они лежат вплотную): стержень AB — чёрная линия, вторая проволока — бирюзовая, стрелки — её ход от A к B

6. Сопротивление и мощность. Участок AC (25 см, $m=2$) и участок CB (15 см, $m=4$) соединены последовательно (рис. 3):

$$R_{AC} = \frac{r\cdot 0{,}25}{2} \approx 7{,}5\text{ мОм}, \qquad R_{CB} = \frac{r\cdot 0{,}15}{4} \approx 2{,}3\text{ мОм},$$

$$R = R_{AC} + R_{CB} \approx 9{,}8\text{ мОм}.$$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{0{,}3^2}{9{,}77\cdot 10^{-3}}\text{ Вт} \approx 9\text{ Вт}.$$

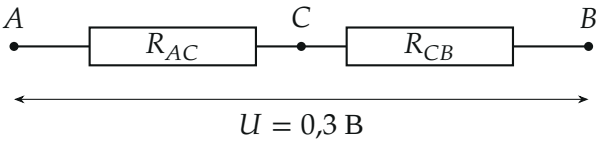


Рис. 3. Эквивалентная схема: два участка включены последовательно

1) только стержень AB

 3,7 Вт

2) стержень и вторая проволока параллельно, без укладки

 5,9 Вт

3) вдоль стержня, остальные 30 см не работают

 7,5 Вт

4) оптимальная укладка (рис. 2)

 9,2 Вт

Рис. 4. Сравнение укладок по мощности

Обратите внимание.

- Просто соединить концы двух проволок параллельно — плохо: так получается $40 \parallel 70 \approx 25{,}5$ см эквивалентной длины против 16,25 см при укладке.
- Слои складывать нужно по проводимости на участке, а не по длине: сопротивление участка в m раз меньше, а не «проволоки как бы короче».
- Контакт нужен именно по всей длине: проволоки в одном месте уравнивают потенциалы только там, где касаются; в точках разного потенциала замыкания лишь удлиняют путь тока.

Проверка.

- Размерность: $r \cdot \text{м} = \text{Ом}$, $U^2/R = \text{В}^2/\text{Ом} = \text{Вт}$.
- Предельный случай: без укладки второй проволоки ($m = 1$ всюду) $R = r \cdot 0{,}4$ и $P \approx 3{,}7$ Вт; при полном покрытии ($m = 2$ на всех 40 см) $R = r \cdot 0{,}2$ и $P \approx 7{,}5$ Вт; найденная укладка лучше обоих, $P \approx 9{,}2$ Вт (рис. 4).

- Второй способ: общая «приведённая» длина $\sum L_i/m_i = 25/2 + 15/4 = 16{,}25$ см, $R = r \cdot 0{,}1625$, и мощность та же.

Физический смысл: всю лишнюю длину второй проволоки выгодно потратить там, где слоёв ещё мало, но целое число слоёв растёт ступенями: проходов может быть 2, 4, 6, и выгодна самая мелкая ступень.

Ответ. Нужно натянуть длинную проволоку вдоль короткой (от A до B), а оставшиеся 30 см сложить вдвое и, перегнув в точке B, приложить к отрезку AB (участок 15 см у клеммы B лежит в четыре слоя, остальные 25 см — в два). Максимальная мощность $P = \dfrac{U^2}{R} \approx 9$ Вт, где $R = r\left(\dfrac{25}{2} + \dfrac{15}{4}\right)$ см $\approx 9{,}8$ мОм.