Самолёт, летящий курсом на северо-восток

Задача 6. [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 6] Самолёт в Новогоднюю ночь в безветренную погоду стартовал с аэродрома Санкт-Петербурга (60° северной широты) и летит на постоянной высоте $h = 5$ км с постоянной по величине скоростью $V = 1000$ км/час, держа всё время курс на северо-восток (по звёздам). С каким по модулю ускорением относительно Земли (в системе отсчёта Птолемея) движется самолёт ровно через время T, равное четырём часам полёта? Землю можно считать шаром с радиусом $R = 6400$ км.

▲ **Решение. Что происходит.** Модуль скорости постоянен, ускорение — только от поворота скорости. Причин две: поверхность изогнута (даже по большому кругу скорость поворачивается вместе с горизонтом — ускорение V^2/ρ к центру Земли), и меридианы сходятся к полюсу, так что для постоянного угла 45° с ними самолёт поворачивает *вдоль* поверхности, тем сильнее, чем ближе полюс. Через 4 ч самолёт почти у полюса, и решает второй вклад. Система отсчёта — неподвижная Земля, её вращение не учитываем. Класс задачи: кинематика движения по сфере с постоянной по модулю скоростью.

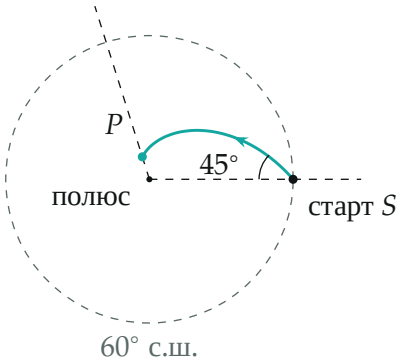


Рис. 1. Вид сверху на Северный полюс: путь самолёта — спираль, пересекающая все меридианы под 45°; P — положение через четыре часа

Обозначения. $\rho = R + h = 6405$ км; φ, λ — широта и долгота; $\beta = 45°$ — угол курса с меридианом; $\vec{e}_N$, $\vec{e}_E$, $\vec{e}_r$ — единичные векторы в точке

самолёта: на север, на восток, вверх; $\vec{e}_\rho$ — единичный вектор от оси Земли, перпендикулярно ей.

1. Где самолёт через время T. Курс относительно меридианов постоянен: $\vec{V} = V(\cos\beta\,\vec{e}_N + \sin\beta\,\vec{e}_E)$. На север самолёт идёт вдоль меридиана радиуса ρ со скоростью $V\cos\beta$, за $T = 4$ ч — на $VT\cos\beta \approx 2830$ км:

$$\Delta\varphi = \frac{VT\cos\beta}{\rho} = \frac{2828}{6405} \approx 0{,}442 \text{ рад} \approx 25{,}3^\circ,$$
$$\varphi = 60^\circ + 25{,}3^\circ \approx 85{,}3^\circ.$$

Самолёт в 4,7° от полюса; радиус параллели $\rho\cos\varphi \approx 525$ км.

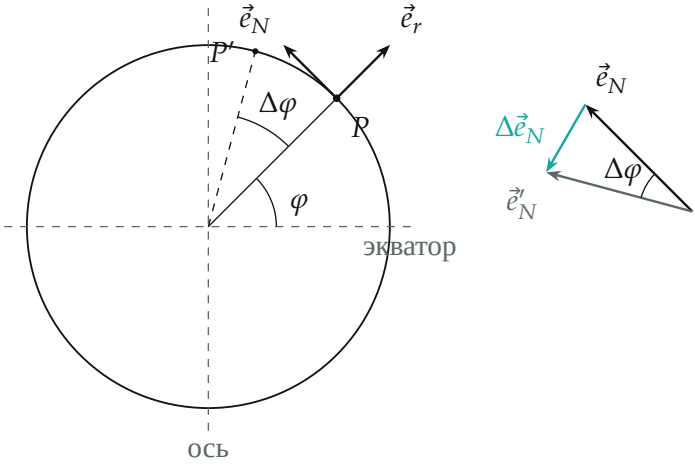


Рис. 2. Сдвиг на север: слева — сечение Земли плоскостью меридиана, базис $\vec{e}_N$, $\vec{e}_r$ в точке P поворачивается на $\Delta\varphi$; справа — приращение $\Delta\vec{e}_N$ (угол преувеличен)

2. Ускорение через поворот базиса. Коэффициенты $V\cos\beta$ и $V\sin\beta$ постоянны, поэтому $\vec{V}$ меняется только из-за поворота $\vec{e}_N$ и $\vec{e}_E$ вместе с самолётом:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = V\left(\cos\beta\,\frac{d\vec{e}_N}{dt} + \sin\beta\,\frac{d\vec{e}_E}{dt}\right).$$

Разложим малый сдвиг самолёта на сдвиг к северу и к востоку.

3. Сдвиг на север на угол $\Delta\varphi$ — поворот вокруг оси, перпендикулярной плоскости меридиана (рис. 2): $\vec{e}_E$ не меняется, $\vec{e}_N$ поворачивается на $\Delta\varphi$ и получает приращение длиной $\Delta\varphi$ против $\vec{e}_r$:

$$\Delta\vec{e}_N = -\Delta\varphi\,\vec{e}_r, \qquad \Delta\vec{e}_E = 0.$$

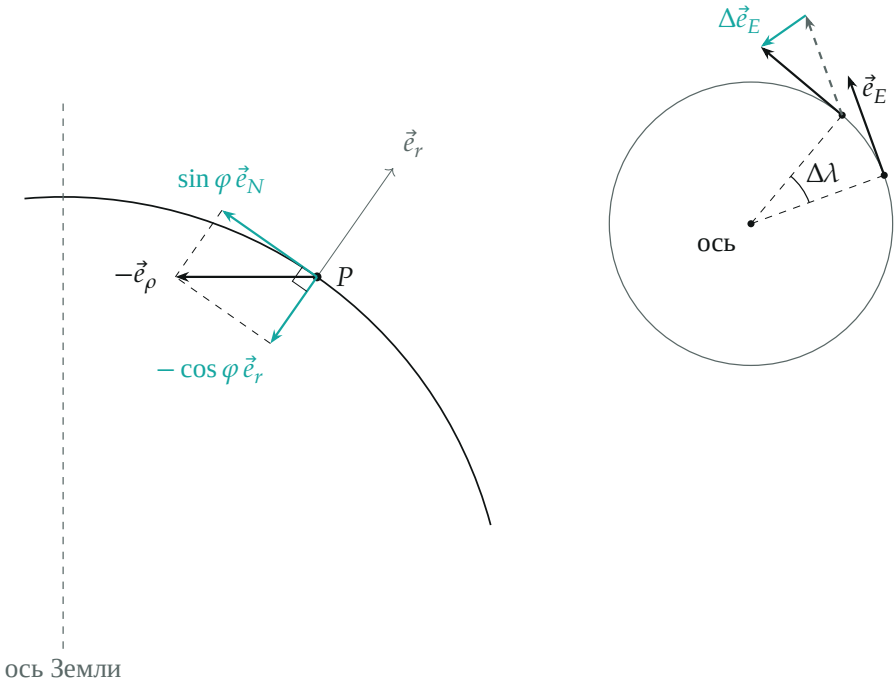


Рис. 3. Сдвиг на восток: слева — разложение направления к оси; справа — вид сверху на параллель, $\vec{e}_E$ поворачивается на $\Delta\lambda$ (угол преувеличен)

4. Сдвиг на восток на угол $\Delta\lambda$ — поворот всего базиса вокруг оси Земли (рис. 3). Вектор $\vec{e}_E$ получает приращение длиной $\Delta\lambda$ к оси, то есть вдоль $-\vec{e}_\rho = \sin\varphi\,\vec{e}_N - \cos\varphi\,\vec{e}_r$ (разложение в плоскости меридиана, рис. 3 слева). У $\vec{e}_N$ составляющая вдоль оси Земли не меняется, а составляющая $-\sin\varphi\,\vec{e}_\rho$ получает приращение $-\sin\varphi\,\Delta\lambda\,\vec{e}_E$:

$$\Delta\vec{e}_E = \Delta\lambda\,(\sin\varphi\,\vec{e}_N - \cos\varphi\,\vec{e}_r), \qquad \Delta\vec{e}_N = -\sin\varphi\,\Delta\lambda\,\vec{e}_E.$$

5. Сдвиги за время Δt: $\Delta\varphi = \dfrac{V\cos\beta\,\Delta t}{\rho}$ (меридиан радиуса ρ), $\Delta\lambda = \dfrac{V\sin\beta\,\Delta t}{\rho\cos\varphi}$ (параллель радиуса $\rho\cos\varphi$).

6. Приращение скорости. Подставим пункты 3 и 4 в $\Delta\vec{V} = V(\cos\beta\,\Delta\vec{e}_N + \sin\beta\,\Delta\vec{e}_E)$:

$$\Delta\vec{V} = -V\left(\cos\beta\,\Delta\varphi + \sin\beta\cos\varphi\,\Delta\lambda\right)\vec{e}_r + V\sin\varphi\,\Delta\lambda\left(\sin\beta\,\vec{e}_N - \cos\beta\,\vec{e}_E\right).$$

с $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ из пункта 5:

$$\text{вдоль } \vec{e}_r: \quad -V\cdot\frac{V\Delta t}{\rho}\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) = -\frac{V^2}{\rho}\Delta t;$$

$$\text{вдоль } \sin\beta\,\vec{e}_N - \cos\beta\,\vec{e}_E: \quad V\sin\varphi\cdot\frac{V\sin\beta\,\Delta t}{\rho\cos\varphi} = \frac{V^2\sin\beta\tan\varphi}{\rho}\Delta t.$$

Единичный вектор $\sin\beta\,\vec{e}_N - \cos\beta\,\vec{e}_E \perp \vec{V}$ — поворот скорости влево, к полюсу. Итак,

$$a_r = \frac{V^2}{\rho}, \qquad a_\tau = \frac{V^2\sin\beta\tan\varphi}{\rho},$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\tau^2} = \frac{V^2}{\rho}\sqrt{1 + \sin^2\beta\,\tan^2\varphi}.$$

7. Числа. $V = 1000/3{,}6 \approx 277{,}8$ м/с, $V^2/\rho = \dfrac{77160}{6{,}405\cdot10^6} \approx 0{,}0120$ м/с^2; $\tan\varphi = \tan 85{,}3^\circ \approx 12{,}2$, $\sin\beta\tan\varphi \approx 8{,}6$. Тогда

$$a_\tau \approx 0{,}0120\cdot 8{,}6 \approx 0{,}104 \text{ м/с}^2,$$
$$a = 0{,}0120\cdot\sqrt{1 + 8{,}6^2} \approx 0{,}104 \text{ м/с}^2 \approx 0{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Составляющая к центру Земли почти ничего не добавляет.

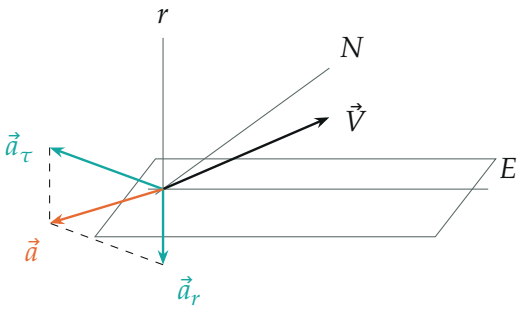


Рис. 4. Векторы в точке P: $\vec{a}_r$ — к центру Земли, $\vec{a}_\tau$ — горизонтально, перпендикулярно $\vec{V}$

Обратите внимание.

- Поворот скорости вдоль поверхности нельзя забыть: он в $\sin\beta\tan\varphi \approx 8{,}6$ раза больше V^2/ρ.
- Курс «на северо-восток» — постоянный угол с *меридианом*, а не постоянное направление в пространстве; поэтому самолёт летит по спирали, а не по большому кругу.

Проверка.

- Размерность $(\text{м/с})^2/\text{м} = \text{м/с}^2$. Полёт на север ($\beta = 0$): $a = V^2/\rho$ — большой круг. Полёт на восток ($\beta = 90°$): $a = V^2/(\rho\cos\varphi)$ — центростремительное ускорение на параллели радиуса $\rho\cos\varphi$. На экваторе $a = V^2/\rho$ при любом курсе.
- Второй способ — прямой счёт: положение на локсодромии $\varphi(t), \lambda(t)$, вторая производная по времени даёт $0{,}1043\ \text{м/с}^2$.

Физический смысл: у полюса меридианы сходятся почти в точку, и держать к ним постоянный угол — значит всё время заворачивать к полюсу; отсюда ускорение в 9 раз больше, чем у полёта по большому кругу.

Ответ. $a = \dfrac{V^2}{R+h}\sqrt{1+\sin^2\beta\,\tan^2\varphi} \approx 0{,}1\ \text{м/с}^2$, где $\varphi \approx 85{,}3°$ — широта через $T = 4$ ч, $\beta = 45°$.