Клин и брусок: после опрокидывания

Задача 7. [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 7] Клин массой $M = 5$ кг с углом при основании $\alpha = 45°$ расположен на гладком горизонтальном столе. На наклонной поверхности клина лежит брусок массой $m = 1$ кг. На брусок начинает действовать сила, направленная горизонтально в сторону клина. Модуль этой силы возрастает с течением времени t по закону $F = \delta t$, где коэффициент пропорциональности $\delta = 1$ Н/с. Коэффициент трения между клином и бруском равен $\mu = 1{,}2$. 1) Чему равен модуль силы трения, действующей со стороны клина на брусок через время $T = 12$ с после начала действия силы F, если клин к этому моменту ещё не начал опрокидываться? 2) Найдите ускорения клина и бруска через время $5T = 1$ мин после начала действия силы F. Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.

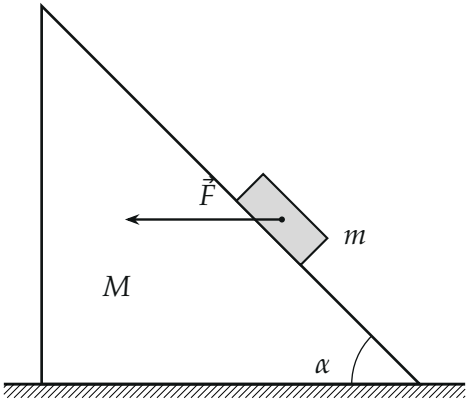


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Сила $\vec{F}$ прижимает брусок к грани и толкает систему влево; стол гладкий, так что клин разгоняет только брусок — реакцией и трением. Пока проскальзывания нет, тела движутся с общим ускорением $F/(m + M)$. При малой F трение держит брусок от сползания (вверх по грани); с ростом F клину нужна всё бóльшая горизонтальная сила, трение проходит через нуль и поворачивает вниз по грани. Проскользнёт ли брусок, решает сравнение μ с $\operatorname{ctg}\alpha$. Класс задачи: динамика двух связанных тел с трением покоя.

Обозначения. Оси (рис. 2): x — горизонтально по $\vec{F}$ (влево), y — вверх. N — реакция клина на брусок; f — проекция силы трения на брусок на направление вверх вдоль грани ($f < 0$ — трение вниз по грани); a, A — ускорения бруска и клина.

1. Движение вместе. Допустим, брусок не проскальзывает: $a = A$. Единственная горизонтальная внешняя сила для системы «брусок + клин» — F (стол гладкий). Второй закон Ньютона для системы в проекции на x:

$$(m + M)\,a = F \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m+M} = \frac{\delta t}{m+M}.$$

Отсутствие проскальзывания проверим в п. 5.

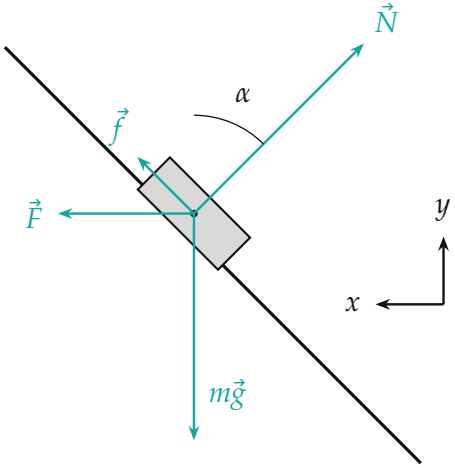


Рис. 2. Силы на брусок и оси (при небольшой F трение направлено вверх вдоль грани, $f > 0$)

2. Второй закон Ньютона для бруска. Силы: $m\vec{g}$, $\vec{N}$ (под углом α к вертикали), $\vec{f}$ вдоль грани, $\vec{F}$; ускорение a направлено по x:

$$\begin{aligned} x: &\quad F - N\sin\alpha + f\cos\alpha = m\,a, \\ y: &\quad N\cos\alpha + f\sin\alpha - mg = 0. \end{aligned}$$

Так как $F - ma = Ma$, первое уравнение даёт $N\sin\alpha - f\cos\alpha = Ma$.

Решая его вместе со вторым (умножаем на $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, складываем или вычитаем):

$$N = mg\cos\alpha + Ma\sin\alpha, \qquad f = mg\sin\alpha - Ma\cos\alpha, \qquad a = \frac{F}{m+M}.$$

Как функции F (в ньютонах):

$$N(F) = mg\cos\alpha + \frac{M\sin\alpha}{m+M}F \approx 7{,}07 + 0{,}589\,F,$$
$$f(F) = mg\sin\alpha - \frac{M\cos\alpha}{m+M}F \approx 7{,}07 - 0{,}589\,F.$$

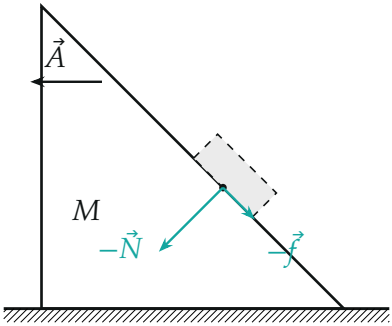


Рис. 3. Силы со стороны бруска на клин (по третьему закону Ньютона); горизонтальная проекция даёт клину ускорение $\vec{A}$

3. Проверка по клину. По третьему закону Ньютона на клин действуют $-\vec{N}$ и $-\vec{f}$ (рис. 3); их горизонтальная проекция $N\sin\alpha - f\cos\alpha = Ma(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = Ma$, то есть $A = a$ — допущение согласовано.

4. Пункт 1: сила трения в момент $T = 12$ с. При $t = T = 12$ с сила $F = \delta T = 12$ Н, $a = 12/6 = 2$ м/с^2, и

$$f = mg\sin\alpha - Ma\cos\alpha = 10\cdot 0{,}707 - 5\cdot 2\cdot 0{,}707 = 7{,}07 - 7{,}07 = 0.$$

Трения нет: при $F = 12$ Н клину нужна сила $Ma = 10$ Н, и её ровно даёт горизонтальная составляющая реакции $N\sin\alpha$. Раньше трение направлено вверх по грани ($f > 0$), позже — вниз ($f < 0$).

5. Нет ли проскальзывания. Нужно $|f| \le \mu N$ всё время. При $f > 0$: $f \le mg\sin\alpha$, $N \ge mg\cos\alpha$, значит $f/N \le \tan\alpha = 1 < \mu$. При $f < 0$: $|f| < Ma\cos\alpha$, $N > Ma\sin\alpha$, значит $|f|/N < \operatorname{ctg}\alpha = 1 < \mu$. Проскальзывания нет ни при какой F (рис. 4).

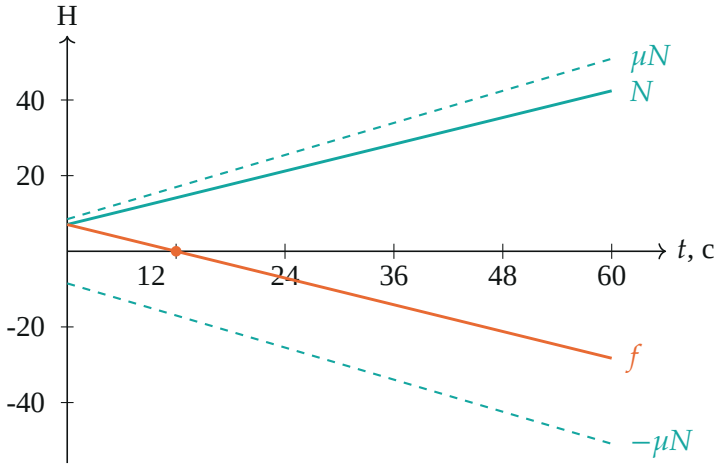


Рис. 4. Зависимость сил от времени: сила трения f всё время лежит между $-\mu N$ и μN; в $t = 12$ с она проходит через нуль

6. Пункт 2: время $5T = 60$ **с.** $F = 60$ Н; проскальзывания нет, поэтому ускорения одинаковы и направлены горизонтально по $\vec{F}$:

$$a = A = \frac{F}{m+M} = \frac{5\delta T}{m+M} = \frac{60}{6} = 10\ \text{м/с}^2.$$

При этом $N \approx 42{,}4$ Н, $f \approx -28{,}3$ Н (вниз по грани), $|f|/N \approx 0{,}67 < \mu$.

Обратите внимание.

- Направление трения меняется со временем — считайте проекцию f со знаком, а не угадывайте.
- Брусок не проскользнёт никогда, потому что $\mu > \operatorname{ctg}\alpha$: $|f|/N \to \operatorname{ctg}\alpha$ при $F \to \infty$.
- Опрокидывание клина зависит от размеров, которых нет в условии; считаем, что клин остаётся на столе.

Проверка.

- $F = 0$: $a = 0, f = mg\sin\alpha, N = mg\cos\alpha$ — брусок просто лежит на наклонной плоскости; $f/N = \tan\alpha = 1 < \mu$, он не сползает.
- Второй закон для бруска по оси x при $F = 60$ Н: $60 - 42{,}4 \cdot 0{,}707 - 28{,}3 \cdot 0{,}707 \approx 10$ Н $= ma$ при $m = 1$ кг, $a = 10$ м/с^2.

Физический смысл: при малой F трение держит брусок на грани, при большой — помогает бруску разгонять клин.

Ответ. 1) через $T = 12$ с сила трения равна 0 Н (при $F = 12$ Н трение между телами отсутствует); 2) ускорения клина и бруска через $5T = 60$ с одинаковы, направлены горизонтально (по $\vec{F}$) и равны $a = A = \dfrac{5\delta T}{m + M} = 10$ м/с^2.