Цилиндр с двумя клапанами

Задача 8. [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 8] В цилиндре под поршнем находится воздух. В стенках цилиндра есть два клапана: впускной K_1 и выпускной K_2. Впускной клапан открывается тогда, когда разность давлений воздуха снаружи и внутри цилиндра превышает $\Delta_1 = 0{,}2\,p_0$, где p_0 — атмосферное давление. Выпускной клапан открывается тогда, когда разность давлений внутри и снаружи превышает $\Delta_2 = 0{,}4\,p_0$. Поршень совершает очень медленные колебания так, что объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от V_0 до $2V_0$. Температура снаружи и внутри цилиндра постоянна и равна T_0. 1) Определите наименьшее и наибольшее количество воздуха в цилиндре при колебаниях поршня. 2) Изобразите в координатах p–V процесс, происходящий с воздухом в цилиндре после того, как поршень уже совершил достаточно много колебаний. Ответьте на оба вопроса задачи, если $\Delta_1 = 0{,}4\,p_0$, а $\Delta_2 = 0{,}2\,p_0$.

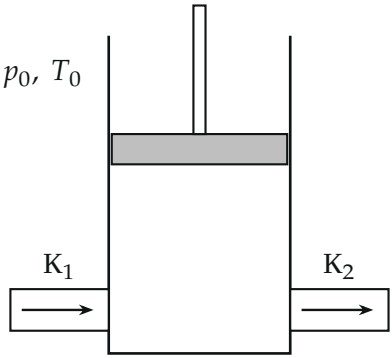


Рисунок условия

▲ **Решение. Что происходит.** Клапаны держат давление в коридоре: впускной открывается при $p < p_0 - \Delta_1$, выпускной — при $p > p_0 + \Delta_2$. Пока оба закрыты, ν постоянно и давление идёт по изотерме (закон Бойля — Мариотта, $T = T_0$). Упёрлось давление в границу — клапан открыт, давление стоит, а воздух входит или выходит, пока движется поршень. Надо понять, достаёт ли изотерма от V_0 до $2V_0$ до границ, и найти установившийся процесс. Класс задачи: изопроцессы с переменным количеством вещества.

Обозначения. $p_{\min} = p_0 - \Delta_1$, $p_{\max} = p_0 + \Delta_2$ — границы коридора; $\nu = \dfrac{pV}{RT_0}$ (уравнение Клапейрона — Менделеева), единица для ν — $p_0V_0/(RT_0)$.

Случай 1: $\Delta_1 = 0{,}2\,p_0$, $\Delta_2 = 0{,}4\,p_0$.

1. Границы давления. $p_{\min} = 0{,}8\,p_0$, $p_{\max} = 1{,}4\,p_0$.

2. Предельные количества воздуха. Воздух выходит только при $p = p_{\max}$, входит только при $p = p_{\min}$. Поэтому меньше всего его в конце выпуска (V_0, $p_{\max}$), больше всего — в конце впуска ($2V_0$, $p_{\min}$):

$$\nu_{\min} = \frac{p_{\max}V_0}{RT_0} = \frac{1{,}4\,p_0V_0}{RT_0}, \qquad \nu_{\max} = \frac{p_{\min}\cdot 2V_0}{RT_0} = \frac{1{,}6\,p_0V_0}{RT_0}.$$

Проверим на самом процессе, что клапаны срабатывают именно так.

3. Процесс. Начнём с $V = V_0$, когда выпуск только что закончился: $p = 1{,}4\,p_0$ (точка A, рис. 2).

- *Расширение, клапаны закрыты* (участок AB): изотерма $pV = 1{,}4\,p_0V_0$. Давление падает до $0{,}8\,p_0$ при $V_B = \dfrac{1{,}4}{0{,}8}V_0 = 1{,}75\,V_0 < 2V_0$.
- *Впуск* (BC): $p = 0{,}8\,p_0$, объём растёт до $2V_0$, ν растёт от 1,4 до 1,6 (в единицах p_0V_0/RT_0).
- *Сжатие, клапаны закрыты* (участок CD): изотерма $pV = 1{,}6\,p_0V_0$. Давление растёт до $1{,}4\,p_0$ при $V_D = \dfrac{1{,}6}{1{,}4}V_0 = \dfrac{8}{7}V_0 \approx 1{,}14\,V_0$.
- *Выпуск* (DA): $p = 1{,}4\,p_0$, объём уменьшается до V_0, ν падает до 1,4. Цикл замкнулся.

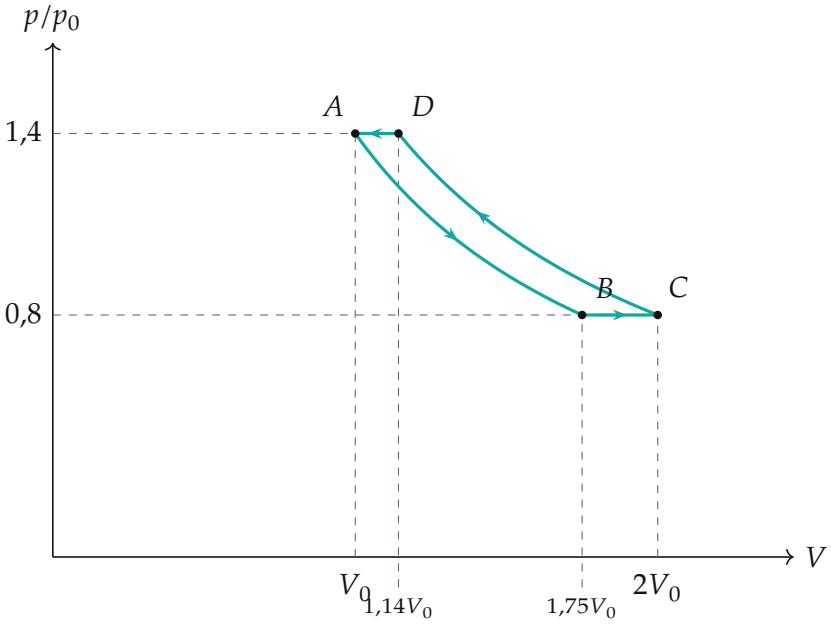


Рис. 2. Случай 1: $A \to B$ — расширение при закрытых клапанах, $B \to C$ — впуск при $0{,}8\,p_0$, $C \to D$ — сжатие, $D \to A$ — выпуск при $1{,}4\,p_0$

4. Установление. После первого сжатия до V_0 в цилиндре не больше 1,4 (лишнее выпущено); при расширении до $2V_0$ давление не выше $0{,}7\,p_0 < p_{\min}$, впуск доводит ν до 1,6, и со следующего сжатия процесс идёт по циклу рис. 2.

Ответ на 1) в случае 1: $\nu_{\max} = \dfrac{1{,}6\,p_0 V_0}{RT_0}$, $\nu_{\min} = \dfrac{1{,}4\,p_0 V_0}{RT_0}$. Ответ на 2): цикл $ABCD$ на рис. 2.

Случай 2: $\Delta_1 = 0{,}4\,p_0$, $\Delta_2 = 0{,}2\,p_0$.

5. Границы давления. $p_{\min} = 0{,}6\,p_0$, $p_{\max} = 1{,}2\,p_0$. Их отношение $1{,}2/0{,}6 = 2$ в точности равно отношению объёмов $2V_0/V_0$.

6. Установившееся количество воздуха. При $\nu = 1{,}2$ давление на изотерме меняется от $1{,}2\,p_0$ (при V_0) до $0{,}6\,p_0$ (при $2V_0$) — ровно до границ, но не *за* них: разность давлений не превышает Δ_1 и Δ_2, клапаны закрыты. Больше воздуха — при V_0 давление выше $1{,}2\,p_0$ и выпуск сбросит лишнее до 1,2; меньше — при $2V_0$ давление ниже $0{,}6\,p_0$ и впуск

добавит до 1,2. Так устанавливается $\nu = \dfrac{1{,}2\,p_0V_0}{RT_0}$.

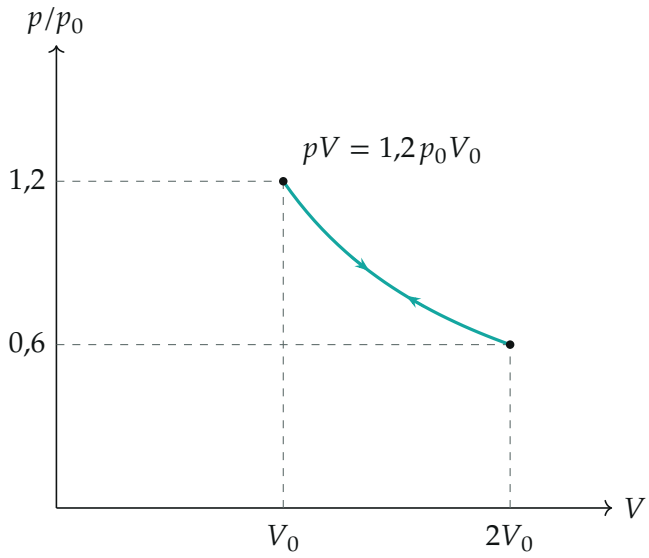


Рис. 3. Случай 2: воздух двигается туда и обратно по одной изотерме, клапаны не открываются

Ответ в случае 2: $\nu = \dfrac{1{,}2\,p_0V_0}{RT_0}$ постоянно; процесс — изотерма $pV = 1{,}2\,p_0V_0$ от $(V_0;\ 1{,}2\,p_0)$ до $(2V_0;\ 0{,}6\,p_0)$ туда и обратно (рис. 3).

Обратите внимание.

- Клапан открывается, когда разность давлений *превышает* Δ: если давление только доходит до границы (случай 2), клапан остаётся закрытым.
- Воздух входит и выходит только на изобарах (при открытом клапане); на изотермах его количество постоянно.

Проверка.

- Замкнутость цикла случая 1: на BC ν растёт на $0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}2$, на DA падает на $1{,}4 \cdot (1{,}1429 - 1) = 0{,}2$ в тех же единицах: сколько вошло, столько вышло (рис. 4).

- Изотерма меняет давление вдвое. В случае 1 $p_{\max}/p_{\min} = 1{,}75 < 2$ — клапаны обязаны срабатывать; в случае 2 отношение ровно 2 — изотерма вписана в коридор.

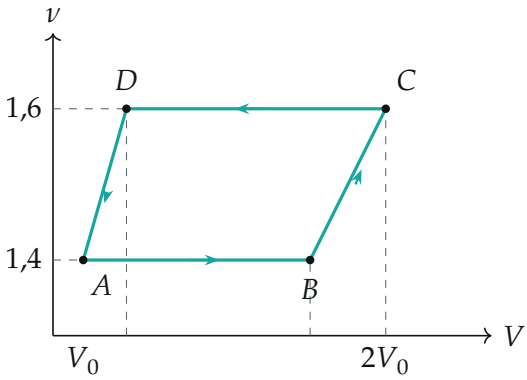


Рис. 4. Количество воздуха ν (в единицах p_0V_0/RT_0) за цикл случая 1: на изотермах AB и CD оно постоянно (1,4 и 1,6), растёт на BC (впуск) и убывает на DA (выпуск).

Физический смысл: клапаны не дают давлению в цилиндре выйти за коридор вокруг p_0, а количество воздуха подстраивается так, чтобы изотерма от V_0 до $2V_0$ как раз помещалась в коридор.

Ответ. Случай $\Delta_1 = 0{,}2\,p_0$, $\Delta_2 = 0{,}4\,p_0$: $\nu_{\max} = \dfrac{1{,}6\,p_0V_0}{RT_0}$, $\nu_{\min} = \dfrac{1{,}4\,p_0V_0}{RT_0}$; процесс — цикл из изотермы, изобары $0{,}8\,p_0$, изотермы и изобары $1{,}4\,p_0$ (рис. 2). Случай $\Delta_1 = 0{,}4\,p_0$, $\Delta_2 = 0{,}2\,p_0$: $\nu = \dfrac{1{,}2\,p_0V_0}{RT_0}$ постоянно; процесс — изотерма между $(V_0;\ 1{,}2\,p_0)$ и $(2V_0;\ 0{,}6\,p_0)$ туда и обратно (рис. 3).