Заряды на нити и налетающее тело

Задача 9. [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 9] Две покоящиеся в космосе вдали от других тел материальные точки, имеющие одинаковые массы m и электрические заряды q, скреплены невесомой, нерастяжимой и не проводящей электрический ток прочной гибкой нитью длиной L. Незаряженное тело малых размеров массой $2m$ движется поступательно в направлении средней точки нити со скоростью V, направленной перпендикулярно нити. При соприкосновении тела и нити они друг относительно друга не проскальзывают, но и не прилипают друг к другу. Какими будут модули скоростей материальных точек и тела через очень большое время? На каком минимальном расстоянии $L_{\min}$ друг от друга будут находиться материальные точки в процессе движения?

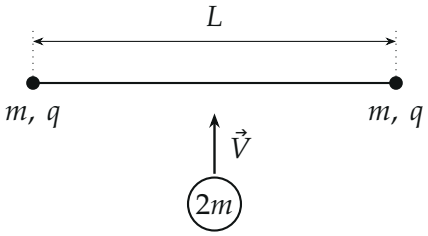


Рисунок условия (поясняющий): точки с зарядами q на нити длиной L и налетающее тело

▲ **Решение. Что происходит.** Тело упирается в середину нити и тянет её за собой; нить, обгибая тело, тянет заряженные точки, и они сближаются, хотя кулоновская сила их отталкивает. Нить нерастяжима и невесома, поэтому половины нити работают как жёсткие связи длиной $L/2$, не принимая энергии. Система из тела и двух точек замкнута (вдали от других тел), и в ней сохраняются импульс и полная энергия, включая энергию кулоновского отталкивания точек. Это даёт ответ на оба вопроса: в конце, когда нить снова прямая, расстояние между точками снова L, и их потенциальная энергия прежняя; а в момент наибольшего сближения всё движется с общей скоростью. Класс задачи: упругий удар с обменом энергии через связь и электростатическую энергию.

Обозначения. Ось y — по скорости тела. V — начальная скорость тела, v — его конечная скорость, u — конечная скорость каждой точки (по симметрии одинаковая), d — расстояние между точками, w — общая скорость в момент наибольшего сближения, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ — коэффициент закона Кулона.

1. Что сохраняется. Внешних сил нет, кулоновские силы и силы натяжения нити внутренние. Сохраняются проекция импульса на ось y и полная механическая энергия. В начале: тело движется со скоростью V, точки покоятся на расстоянии L, значит, импульс $2mV$, энергия $2mV^2/2 + kq^2/L = mV^2 + kq^2/L$. Нить не растягивается и не гнётся «с трением», и тело не прилипает, поэтому энергия на нагрев не переходит.

2. Скорости через долгое время. Тело ударило нить и либо прошло мимо, либо передало движение точкам; к концу взаимодействия нить снова прямая и натянута, расстояние между точками снова L, и их кулоновская энергия снова kq^2/L. По симметрии (оси y) точки движутся с одной скоростью u вдоль y: поперечных скоростей нет, иначе расстояние d менялось бы, а нить его удерживает ($d = L$). Тело: v вдоль y. Законы сохранения:

$$2mV = 2mv + 2mu,$$
$$\frac{2mV^2}{2} = \frac{2mv^2}{2} + 2\cdot\frac{mu^2}{2}.$$

Из первого $V = v + u$, из второго $V^2 = v^2 + u^2$. Возведём первое в квадрат и вычтем второе: $2vu = 0$. Решение $u = 0$, $v = V$ означало бы, что тело прошло сквозь нить и точки остались на месте — этого нить не допускает (тело не проскальзывает мимо неё). Значит, $v = 0$, $u = V$: *точки улетают со скоростью V каждая, а тело останавливается*, как при абсолютно упругом столкновении равных масс ($2m$ и пара точек суммарной массой $2m$), рис. 2.

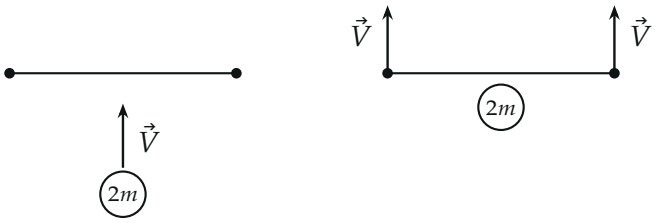


Рис. 2. До и после: тело отдаёт всю скорость точкам, как при упругом ударе равных масс

3. Наибольшее сближение. Расстояние d между точками минимально, когда $\dot{d} = 0$: поперечные скорости точек равны нулю, и обе точки движутся вдоль y со скоростью, которую обозначим u' (рис. 3). Нить, огибающая тело, натянута: каждая её половина длиной $L/2$ соединяет тело с точкой и не растягивается, значит, скорость точки относительно тела вдоль нити равна нулю. Вектор от тела к точке не параллелен оси y (нить изогнута: на рис. 3 он направлен вниз и в сторону), а относительная скорость точки и тела направлена вдоль y: чтобы её проекция на нить была равна нулю, сама относительная скорость должна быть равна нулю: $u' = v'$, то есть *все три тела движутся с общей скоростью* w.

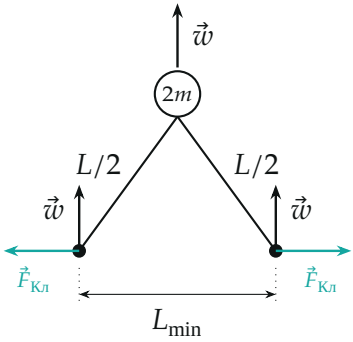


Рис. 3. Момент наибольшего сближения: у тела и обеих точек одна скорость $\vec{w}$, нить натянута, половины имеют длину $L/2$

4. Общая скорость. Импульс системы сохраняется: $2mV = (2m + m + m)\,w$, откуда $w = \dfrac{V}{2}$. Кинетическая энергия в этот момент

$$K = \frac{(2m + m + m)\,w^2}{2} = \frac{4m}{2} \cdot \frac{V^2}{4} = \frac{mV^2}{2},$$

то есть половина начальной (mV^2): вторая половина перешла в потенциальную энергию кулоновского отталкивания.

5. Минимальное расстояние. Закон сохранения энергии для начального момента и момента наибольшего сближения:

$$mV^2 + \frac{kq^2}{L} = \frac{mV^2}{2} + \frac{kq^2}{L_{\min}} \quad \Rightarrow \quad \frac{kq^2}{L_{\min}} = \frac{kq^2}{L} + \frac{mV^2}{2},$$

$$L_{\min} = \left(\frac{1}{L} + \frac{mV^2}{2kq^2}\right)^{-1}.$$

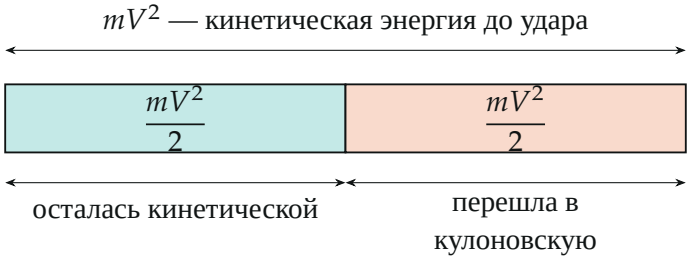


Рис. 4. Энергия в момент наибольшего сближения

Обратите внимание.

- Нельзя считать, что при наибольшем сближении скорость тела равна нулю или V: нить связывает точки с телом, и в этот момент все три тела движутся с одной скоростью $V/2$.
- Кулоновская энергия в конце та же, что и в начале ($d = L$ там и там), поэтому она в законе сохранения энергии для всего процесса сокращается.

- Нить невесомая и нерастяжимая: она не запасает энергию, а лишь передаёт силы.

Проверка.

- Размерность: $kq^2/(mV^2)$ — длина: $\dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2} = \text{м}$, и $L_{\min}$ — длина.
- Предел $V \to 0$: $L_{\min} \to L$, точки вообще не сближаются. Предел $q \to 0$ (нет отталкивания): $L_{\min} \to 0$, нить складывается пополам, точки встречаются у тела. При конечных q всегда $L_{\min} < L$ и $L_{\min} > 0$.
- Закон сохранения энергии в конце: $2m\dfrac{V^2}{2} = 2\dfrac{mV^2}{2}$ — тождество, импульс $2mV = 2mV$ — тоже.

Физический смысл: удар равных масс передаёт всю скорость мишени, но на время удара нить с электрическим отталкиванием работают как пружина, которая запасает половину энергии и потом всю возвращает.

Ответ. 1) две материальные точки после взаимодействия движутся со скоростями V (по модулю), а тело массой $2m$ останавливается; 2) наименьшее расстояние между точками $L_{\min} = \left(\dfrac{1}{L} + \dfrac{mV^2}{2kq^2}\right)^{-1}$, где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.