Переменный резистор в схеме

Задача 10. [МОШ 2015/16, 10 класс, задача 10] Участок AD электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из четырёх постоянных резисторов с сопротивлениями $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 80$ Ом, $R_4 = 25$ Ом и одного переменного резистора $\tilde{R}$, сопротивление которого может изменяться от нуля до $R_{\max} = 10$ кОм. Сила тока, текущего через участок AD, поддерживается постоянной и равной $I = 1{,}2$ А. 1) При каких значениях сопротивления переменного резистора ток через резистор R_2 будет течь в направлении от точки B к точке C, а при каких — в обратном направлении? 2) При каком значении сопротивления переменного резистора напряжение на резисторе R_2 будет максимальным, и чему равно это напряжение?

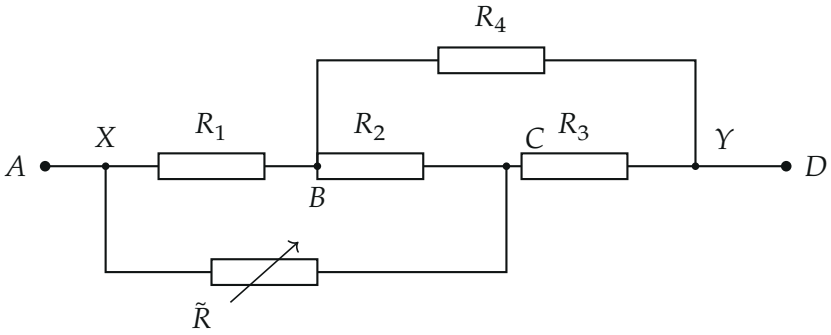


Рисунок условия; узлы X и Y введены для решения

▲ **Решение. Что происходит.** Ток I от A делится в узле X на две ветви: через R_1 и через $\tilde{R}$. Они сходятся к R_4 и R_3, а резистор R_2 — «мостик» между серединами. Такую схему называют мостом: ток через R_2 равен нулю, когда мост сбалансирован, а при отклонении $\tilde{R}$ в одну или в другую сторону меняет направление. Знак тока и его величину найдём, записав токи в ветвях и законы сохранения заряда в узлах, а напряжения — двумя путями между одними и теми же узлами. Класс задачи: расчёт неэлементарной цепи по правилам Кирхгофа (мост Уитстона).

Обозначения. Узлы (рис. 2): X — после точки A, B, C, Y — перед точкой D. Токи (в положительном направлении по стрелкам рис. 2): I_1

через R_1 (от X к B), $\tilde{I}$ через $\tilde{R}$ (от X к C), I_2 через R_2 (от B к C), I_4 через R_4 (от B к Y), I_3 через R_3 (от C к Y). Если $I_2 < 0$, ток течёт от C к B.

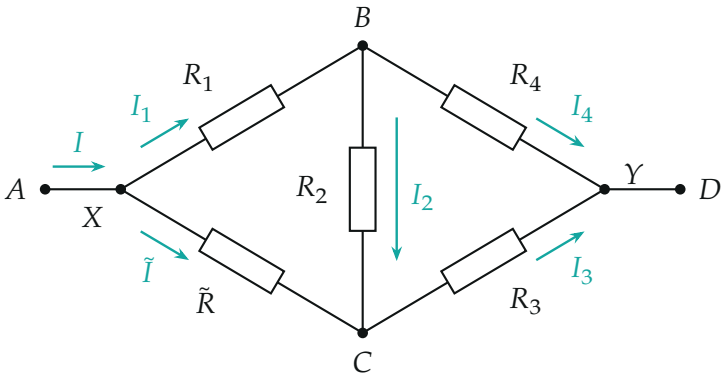


Рис. 2. Та же схема, перерисованная мостом; стрелки — принятые направления токов

1. Закон сохранения заряда. Для узла X (все токи, втекающие в узел, равны вытекающим): $I = I_1 + \tilde{I}$. Для узла B: $I_1 = I_2 + I_4$. Для узла C: $\tilde{I} + I_2 = I_3$. (Для узла Y: $I_3 + I_4 = I$ — следствие трёх предыдущих.)

2. Напряжения двумя путями. Падение напряжения между B и C через резистор R_2 равно I_2R_2. От X до C можно пройти через $\tilde{R}$ или через R_1 и R_2 — напряжение одно и то же: $\tilde{I}\tilde{R} = I_1R_1 + I_2R_2$. От B до Y можно пройти через R_4 или через R_2 и R_3: $I_4R_4 = I_2R_2 + I_3R_3$. Выразим R_2I_2 двумя способами:

$$I_2R_2 = \tilde{I}\tilde{R} - I_1R_1, \qquad I_2R_2 = I_4R_4 - I_3R_3.$$

3. Решение системы. Из п. 1: $I_1 = I - \tilde{I}$, $I_4 = I_1 - I_2 = I - \tilde{I} - I_2$, $I_3 = \tilde{I} + I_2$. Подставим в уравнения п. 2 и получим два уравнения с неизвестными I_2 и $\tilde{I}$:

$$R_2I_2 = (\tilde{R} + R_1)\tilde{I} - R_1I,$$
$$(R_2 + R_3 + R_4)\,I_2 = R_4I - (R_3 + R_4)\tilde{I}.$$

Из первого $\tilde{I} = (R_2I_2 + R_1I)/(\tilde{R} + R_1)$. Подставим во второе, умножим

на $\tilde{R} + R_1$ и соберём I_2 слева:

$$I_2\left[(R_2 + R_3 + R_4)(\tilde{R} + R_1) + R_2(R_3 + R_4)\right] = I\left(R_4\tilde{R} - R_1R_3\right).$$

Числа: $R_2 + R_3 + R_4 = 145$ Ом, $(R_2 + R_3 + R_4)R_1 + R_2(R_3 + R_4) = 2900 + 4200 = 7100$ Ом^2. Итак,

$$I_2 = I\,\frac{R_4\tilde{R} - R_1R_3}{145\,\tilde{R} + 7100},$$

$$U_2 = I_2R_2 = 48\text{ В}\cdot\frac{25\,\tilde{R} - 1600}{145\,\tilde{R} + 7100} \quad (\tilde{R}\text{ в омах}).$$

4. Направление тока (пункт 1). Знак I_2 совпадает со знаком $R_4\tilde{R} - R_1R_3$; знаменатель положителен. Граница: $\tilde{R}_0 = \dfrac{R_1R_3}{R_4} = \dfrac{20\cdot 80}{25} = 64$ Ом — мост сбалансирован, $I_2 = 0$. При $0 < \tilde{R} < 64$ Ом получаем $I_2 < 0$: ток идёт от C к B. При $64\text{ Ом} < \tilde{R} \le 10$ кОм $I_2 > 0$: ток идёт от B к C.

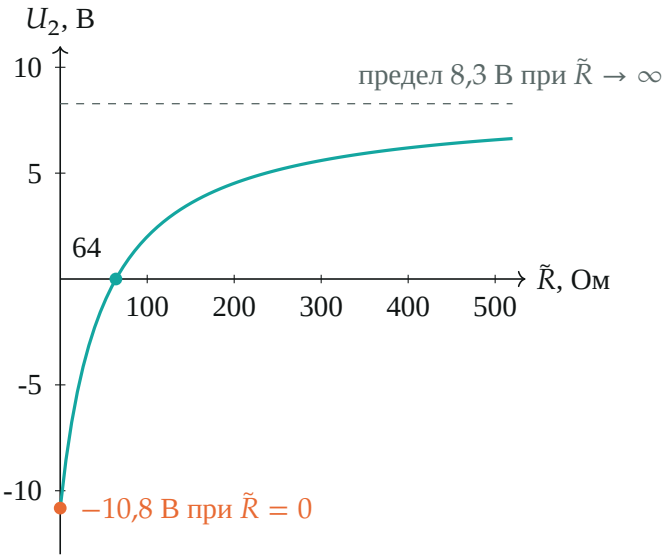


Рис. 3. Напряжение на R_2 в зависимости от $\tilde{R}$ (при $\tilde{R} = 10$ кОм оно равно 8,2 В)

5. Наибольшее напряжение (пункт 2). Функция $U_2(\tilde{R}) = 48\,(25\tilde{R} - 1600)/(145\tilde{R} + 7100)$ монотонна: производная пропорциональна $25 \cdot 7100 + 1600 \cdot 145 > 0$, функция возрастает. Значит, наибольший модуль напряжения бывает на одном из краёв промежутка $0 \le \tilde{R} \le 10$ кОм:

$$U_2(0) = 48 \cdot \frac{-1600}{7100} \approx -10{,}8\ \text{В},$$

$$U_2(10\ \text{кОм}) = 48 \cdot \frac{25 \cdot 10^4 - 1600}{145 \cdot 10^4 + 7100} \approx 8{,}2\ \text{В}.$$

Максимум модуля — при $\tilde{R} = 0$: $|U_2| \approx 10{,}8$ В (ток при этом течёт от C к B).

Обратите внимание.

- Ток через R_2 нельзя найти последовательно-параллельным сложением — схема не сводится к нему: нужны токи по ветвям и уравнения Кирхгофа.
- Знак I_2 — не ошибка: отрицательное значение означает, что ток течёт против выбранной стрелки (от C к B).
- Максимум напряжения — на краю промежутка, где $\tilde{R} = 0$; искать его через производную внутри промежутка бесполезно, функция монотонна.

Проверка.

- Размерность: I·Ом·Ом^2/Ом^2 = В.
- Баланс моста: при $\tilde{R} = R_1R_3/R_4 = 64$ Ом отношения $R_1/\tilde{R} = 20/64 = 0{,}3125$ и $R_4/R_3 = 25/80 = 0{,}3125$ равны, потенциалы B и C равны, $I_2 = 0$ — совпадает с формулой.
- Прямой счёт для $\tilde{R} = 0$: точки X и C совпадают, $R_1 \parallel R_2$ (13,3 Ом) последовательно с R_4 даёт 38,3 Ом, параллельно $R_3 = 80$ Ом. Через R_3 идёт $1{,}2 \cdot 38{,}3/118{,}3 \approx 0{,}389$ А, через ветвь с R_4 — 0,811 А, из них через R_2 — $0{,}811 \cdot 20/60 = 0{,}270$ А от C к B, $U_2 = 40 \cdot 0{,}270 = 10{,}8$ В — сошлось.
- Значения по формуле для $\tilde{R} = 0, 30, 64, 100, 10^4$ Ом: −10,8; −3,6; 0; 2,0; 8,2 В.

Физический смысл: на мосту R_2 видит разность потенциалов двух

делителей напряжения; при малом $\tilde{R}$ делитель со стороны $\tilde{R}$ тянет потенциал C ближе к X, и разность наибольшая.

Ответ. 1) При $0 < \tilde{R} < R_1R_3/R_4 = 64$ Ом ток через R_2 течёт от C к B, при 64 Ом $< \tilde{R} \leq R_{\max}$ — от B к C (при $\tilde{R} = 64$ Ом тока нет). 2) Напряжение на R_2 наибольшее по модулю при $\tilde{R} = 0$ и равно $\approx 10{,}8$ В.