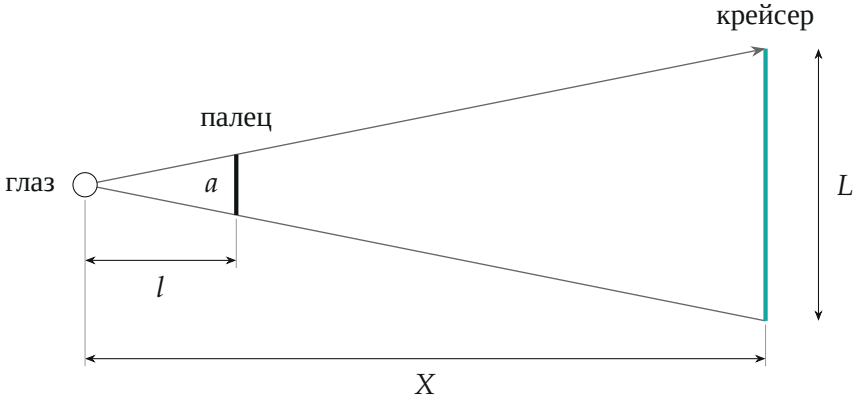
# Радиус Земли по крейсеру на горизонте

**Задача 1.** [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 1] Школьник летом был в Крыму и с высоты $h = 4$ м над уровнем моря увидел на линии горизонта ракетный крейсер «Москва», который шёл вдоль берега и был виден «во весь рост», от ватерлинии до верха надстроек. Школьник прикрыл один глаз, вытянул перед собой руку и большим пальцем, поднятым вверх, «закрыл» весь крейсер от носа до кормы корабля (для открытого глаза). Ширина пальца равна $a = 2$ см. Расстояние от глаза до большого пальца при вытянутой руке равно $l = 70$ см. День был солнечным, поэтому диаметр зрачка открытого глаза был небольшим — всего 1 мм. Затем он через свой смартфон нашёл справку о параметрах крейсера, где обнаружил, что длина корабля составляет $L = 186{,}5$ м. Каков радиус $R$ Земли, вычисленный школьником на основании всех имеющихся данных?




*Поясняющий рисунок. Вид сверху: корабль длиной $L$ перпендикулярен лучу зрения; масштаб не соблюдён ($X \gg l$). Два подобных треугольника с вершиной в глазе, основания — палец $a$ и корабль $L$.*

▲ **Решение. Что происходит.** Палец и корабль видны под одним и тем же углом: палец «закрывает» корабль, значит лучи от глаза к краям пальца продолжаются до носа и кормы корабля. Это два подобных треугольника, из них находим расстояние $X$ до корабля. Корабль стоит на линии

горизонта, то есть там, где луч зрения касается поверхности Земли. Отрезок $X$ — касательная к сфере из точки глаза, и по теореме Пифагора он связан с радиусом Земли $R$ и высотой глаза $h$.

**Обозначения.** $X$ — расстояние от глаза до крейсера; $R$ — радиус Земли; $O$ — центр Земли; $E$ — глаз; $T$ — место, где стоит крейсер (точка касания).

**1. Расстояние до крейсера.** Глаз $E$, края пальца и края корабля лежат на двух лучах из одной точки $E$. Палец (основание $a$, высота $l$ от вершины) и корабль (основание $L$, высота $X$) — основания двух подобных треугольников (рис. 1). Условие подобия — равенство отношений основания к высоте:

$$\frac{a}{l} = \frac{L}{X} \quad \Longrightarrow \quad X = \frac{lL}{a}.$$

Зрачок маленький (1 мм), поэтому размытие края пальца порядка 1 мм, то есть много меньше $a = 20$ мм: края пальца считаем чёткими, а глаз — точкой.

**2. Касательная к Земле.** Земля — шар с центром $O$. Луч зрения вдоль горизонта касается поверхности в точке $T$, где и стоит крейсер, значит $OT \perp ET$ (радиус перпендикулярен касательной). Треугольник $OET$ прямоугольный с гипотенузой $OE = R + h$ и катетами $OT = R$, $ET = X$ (рис. 2).

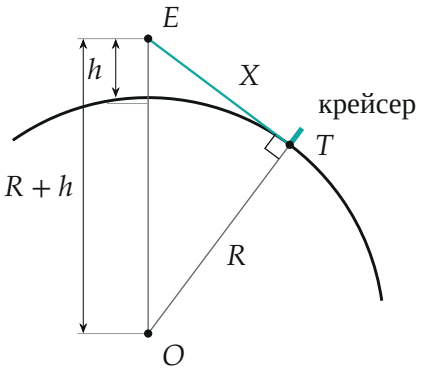



*Рис. 2. Сечение Земли плоскостью через центр, глаз и корабль (высота $h$ сильно преувеличена).*

Теорема Пифагора для $\triangle OET$:

$$(R+h)^2 = R^2 + X^2 \quad \Longrightarrow \quad X^2 = 2Rh + h^2 \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{X^2 - h^2}{2h}.$$

Высота глаза много меньше радиуса Земли ($h = 4$ м, $R \sim 10^6$ м), а значит $h^2 \ll X^2$ (16 м$^2$ против $4{,}3 \cdot 10^7$ м$^2$), и $h^2$ можно отбросить:

$$R \approx \frac{X^2}{2h}.$$

**3. Радиус Земли.** Подставляем $X$ из пункта 1:

$$R \approx \frac{1}{2h}\left(\frac{lL}{a}\right)^2 = \frac{l^2L^2}{2h\,a^2}.$$

Числа: $X = \dfrac{0{,}70 \cdot 186{,}5}{0{,}02}$ м $\approx 6{,}53$ км, откуда

$$R \approx \frac{(6527{,}5\text{ м})^2}{2 \cdot 4\text{ м}} \approx 5{,}33 \cdot 10^6\text{ м} \approx 5326\text{ км}.$$

**Обратите внимание.** Радиус пропорционален $1/a^2$: ошибка в ширине пальца удваивается. Ширина пальца «2 см» дана с точностью до миллиметра (5%), поэтому $R$ известен лишь с точностью около 10%. Настоящий радиус Земли (6371 км) получился бы при $a \approx 1{,}83$ см (рис. 3).

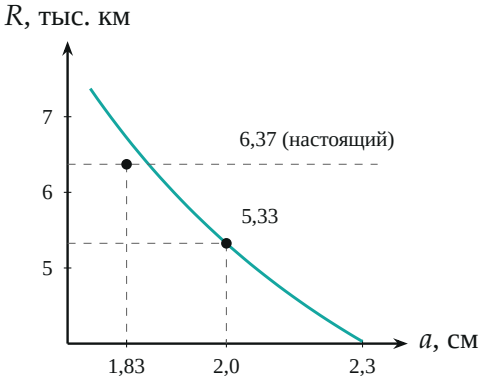



*Рис. 3. Вычисленный радиус как функция ширины пальца a; пунктир — настоящий радиус 6371 км.*

**Проверка.** Размерность: $\dfrac{l^2L^2}{h\,a^2}$ даёт $\dfrac{\text{м}^2\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{м}^2}=$ м. Обратная проверка с настоящим радиусом: при $R=6371$ км и $h=4$ м горизонт лежит на расстоянии $X=\sqrt{2Rh}\approx 7{,}14$ км; корабль длиной 186,5 м виден оттуда под углом $L/X\approx 0{,}026$, палец на вытянутой руке — под углом $a/l\approx 0{,}029$. Углы близки, значит ответ физически осмыслен.

Смысл: по размеру закрытого пальцем корабля находим расстояние до горизонта, а расстояние до горизонта и высота глаза определяют радиус планеты.

**Ответ.** $R\approx\dfrac{l^2L^2}{2h\,a^2}\approx 5326$ км.