Кошка прыгает с табуретки

Задача 2. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 2] На краю табуретки массой $M = 4{,}5$ кг сидит кошка массой $m = 1{,}5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между ножками $d = 30$ см (см. рис.). Коэффициент трения между ножками и полом равен $\mu = 0{,}5$. Кошка прыгает с табуретки в направлении, показанном стрелкой. При этом ускорение центра масс кошки направлено горизонтально. При каком максимальном значении модуля этого ускорения табуретка будет оставаться неподвижной? Если модуль ускорения превысит это значение на очень малую величину, то как начнёт двигаться табуретка: скользить по полу или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси? Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.

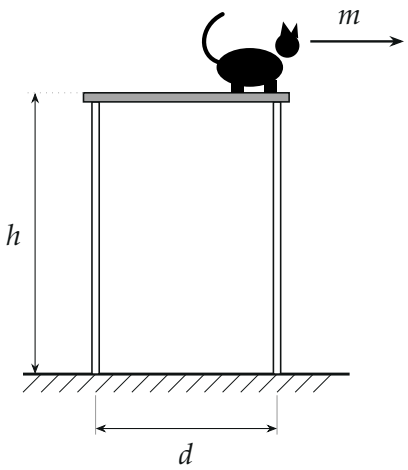


Рисунок условия: кошка на краю табуретки прыгает вправо.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Кошка разгоняется, отталкиваясь от табуретки, и по третьему закону Ньютона табуретка получает от кошки такой же по модулю толчок в обратную сторону: вниз и назад. Он пытается сделать с табуреткой одно из двух: сдвинуть её по полу (трения не хватит) или опрокинуть (момент толчка превзойдёт момент силы тяжести). Поэтому находим оба порога по ускорению кошки и смотрим,

какой достигается раньше. Законы: второй и третий законы Ньютона, условие равновесия твёрдого тела (сумма сил и сумма моментов равны нулю), закон трения $F_{\text{тр}} \le \mu N$.

Обозначения. Ось x — по прыжку (вправо), ось y — вверх. a — ускорение кошки ($a_x = a$, $a_y = 0$). A — нижний конец левой ножки (дальней от места, куда прыгает кошка). N_1, N_2 — силы нормальной реакции пола на левую и правую ножки, $F_{\text{тр}}$ — суммарная сила трения пола о ножки.

1. Силы между кошкой и табуреткой. Второй закон Ньютона для кошки в проекциях на оси (рис. 1). По вертикали $a_y = 0$, значит $N - mg = 0$ и $N = mg$. По горизонтали единственная сила — сила трения лап о крышку, направленная по прыжку: $F = ma$.

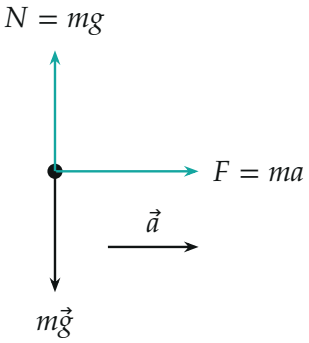


Рис. 1. Силы на кошку (бирюзовые — со стороны табуретки); $\vec{a}$ — ускорение центра масс кошки.

По третьему закону Ньютона кошка действует на табуретку силами тех же модулей в обратную сторону: вертикальной mg вниз и горизонтальной ma назад (влево). Обе приложены к краю крышки над правой ножкой, где сидит кошка (рис. 2).

2. Порог опрокидывания. Пока табуретка неподвижна, выполнены условия равновесия. С ростом a нормальная реакция правой ножки N_2 убывает, и опрокидывание начинается, когда N_2 обращается в нуль: правая ножка отрывается от пола, и табуретка поворачивается вокруг левой (точки A). Моменты берём относительно A потому, что нормальная реакция и сила трения левой ножки приложены в A и момента не дают,

а $N_2 = 0$. Остаются три силы (рис. 2): ma с плечом h стремится приподнять правую ножку (против часовой стрелки), mg с плечом d и Mg с плечом $d/2$ (центр масс табуретки посередине между ножками) прижимают её (по часовой стрелке).

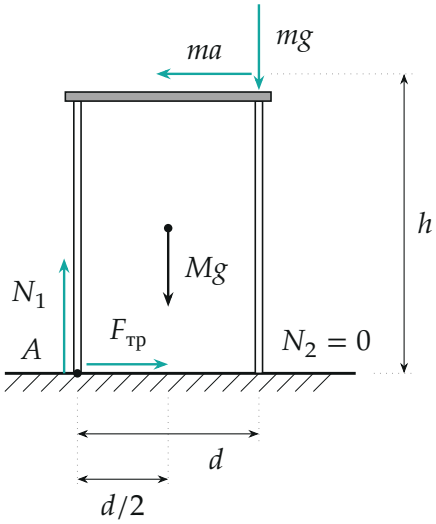


Рис. 2. Табуретка в момент начала опрокидывания (силы на табуретку; $N_2 = 0$).

Условие равенства нулю суммы моментов относительно A на пороге:

$$ma\,h = mg\,d + Mg\,\frac{d}{2} \quad\Longrightarrow\quad a_{\text{опр}} = \frac{gd}{h}\left(1 + \frac{M}{2m}\right).$$

Числа: $\dfrac{gd}{h} = \dfrac{10 \cdot 0{,}30}{0{,}45} = \dfrac{20}{3}$ м/с^2, $1 + \dfrac{M}{2m} = 1 + \dfrac{4{,}5}{3} = 2{,}5$, откуда $a_{\text{опр}} = \dfrac{50}{3} \approx 16{,}7$ м/с^2.

То же через реакцию правой ножки: моменты относительно A при любом a (с учётом N_2) дают

$$N_2 d - mg\,d - Mg\,\frac{d}{2} + ma\,h = 0 \quad\Longrightarrow\quad N_2 = mg + \frac{Mg}{2} - \frac{h}{d}\,ma.$$

N_2 линейно убывает с ростом a (от 37,5 Н при $a = 0$) и обращается в нуль при найденном $a_{\text{опр}}$ (рис. 3).

3. Порог проскальзывания. Пока табуретка не двигается, сумма горизонтальных сил на неё равна нулю: сила ma от кошки (влево) уравновешена суммарной силой трения пола, $F_{\text{тр}} = ma$; по вертикали $N_1 + N_2 = (M + m)g$ (вес табуретки и сила mg от кошки), то есть полная нормальная реакция от a не зависит. Трение удерживает табуретку, пока $F_{\text{тр}} \le \mu(N_1 + N_2)$. Предельное значение достигается при

$$ma_{\text{скольж}} = \mu(M + m)g \quad \Longrightarrow \quad a_{\text{скольж}} = \frac{\mu(M + m)g}{m}.$$

Числа: $a_{\text{скольж}} = \dfrac{0{,}5 \cdot 6 \cdot 10}{1{,}5} = 20$ м/с^2. Силы трения и реакции ножек считаем суммарными: если одна ножка разгружается, другая берёт нагрузку на себя, и скользят обе сразу при полном μN.

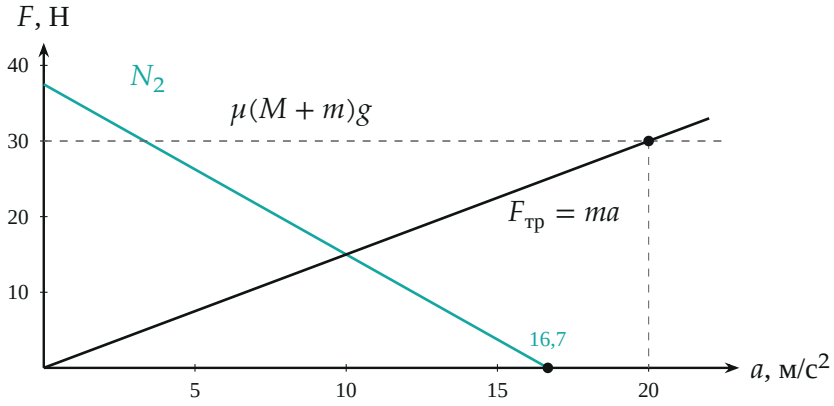


Рис. 3. Бирюзовая прямая — реакция правой ножки $N_2(a)$, обращается в нуль при $a = 16{,}7$ м/с^2 (табуретка отрывается от пола раньше). Чёрная прямая — сила трения ma, которая достигнет предельного значения $\mu(M+m)g = 30$ Н (пунктир) только при $a = 20$ м/с^2.

4. Что произойдёт при превышении порога. Из пунктов 2 и 3: $a_{\text{опр}} = 16{,}7 < a_{\text{скольж}} = 20$ м/с^2. При $a = a_{\text{опр}}$ сила трения, нужная для покоя, равна $ma = 25$ Н $< \mu(M + m)g = 30$ Н, то есть трение

ещё не исчерпано, а N_2 уже нуль. Значит, при малом превышении $a_{\text{опр}}$ первым нарушится условие равновесия по моментам: табуретка начнёт опрокидываться, поворачиваясь вокруг оси, проходящей через нижний конец левой ножки (дальней от места, куда прыгает кошка), без проскальзывания.

Обратите внимание. (1) Вертикальная сила на табуретку от кошки равна именно mg, потому что ускорение центра масс кошки горизонтально; она не зависит от a. (2) Для вывода об опрокидывании недостаточно найти один порог: надо сравнить два и взять меньший. (3) Центр масс табуретки лежит над серединой между ножками, поэтому плечо Mg равно $d/2$, а высота центра масс не нужна.

Проверка. Размерность: $\dfrac{gd}{h}$ — м/с^2 (отношение d/h безразмерно), множитель $\left(1+\dfrac{M}{2m}\right)$ безразмерен. Предел $M \to 0$: $a_{\text{опр}} \to \dfrac{gd}{h}$ — у невесомой табуретки устойчивость создаёт только вес кошки (mgd против mah); при росте M и d порог растёт, при росте высоты h падает. Сила трения $ma_{\text{опр}} = 25$ Н меньше предельной 30 Н, как и в пункте 4.

Смысл: толчок кошки назад и вниз создаёт опрокидывающий момент относительно дальней ножки; он перекрывает устойчивость раньше, чем трение сдастся.

Ответ. Табуретка остаётся неподвижной при

$$a \le \frac{gd}{h}\left(\frac{M}{2m}+1\right) = \frac{50}{3} \approx 16{,}7 \text{ м/с}^2;$$

при небольшом превышении этого значения табуретка начнёт опрокидываться (без проскальзывания) вокруг оси, проходящей через нижний конец дальней от прыжка ножки (проскальзывание потребовало бы $a = 20$ м/с^2).