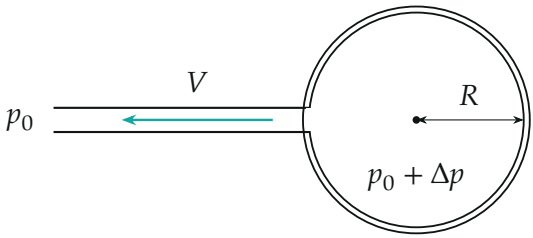
Сдувание мыльного пузыря

Задача 3. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 3] Вася выдувает через длинную трубку сферический мыльный пузырь. Надув пузырь до некоторого размера, он выпускает трубку изо рта, при этом воздух из пузыря выходит наружу обратно через трубку. Окончательно пузырь исчезает, так и не лопнув, через время τ после того, как его перестали надувать. За какое время сдуется надутый таким же образом мыльный пузырь вдвое большего радиуса? Считайте, что воздух движется по трубке достаточно медленно, свойства мыльной плёнки у обоих пузырей одинаковы.



Поясняющий рисунок. Пузырь на конце длинной тонкой трубки: давление внутри $p_0 + \Delta p$, снаружи p_0; воздух вытекает со средней скоростью V.

▲ **Решение. Что происходит.** Мыльная плёнка стремится сжаться и давит на воздух внутри пузыря, поэтому давление в пузыре на Δp больше атмосферного. Этот перепад давления гонит воздух по длинной тонкой трубке наружу. Течение медленное, воздух в трубке не ускоряется, значит перепад давления уравновешен силой вязкого трения о стенки трубки, а эта сила пропорциональна скорости течения. Отсюда скорость вытекания воздуха, а значит и скорость убывания объёма пузыря, пропорциональна перепаду давления Δp, который тем больше, чем меньше пузырь. Нужно связать радиус пузыря со временем и найти, как время сдувания зависит от начального радиуса R_0. Законы: баланс сил на половину плёнки (давление Лапласа), баланс сил на воздух в трубке (вязкое трение), сохранение объёма воздуха.

Обозначения. R — радиус пузыря в момент t, R_0 — начальный радиус, σ — коэффициент поверхностного натяжения плёнки, p_0 — атмосферное давление, Δp — избыточное давление в пузыре, r и ℓ — радиус

и длина трубки, V — средняя скорость воздуха в трубке, Q — объёмный расход воздуха через трубку.

1. Избыточное давление в пузыре. Мысленно разрежем пузырь плоскостью через центр и рассмотрим правую половину плёнки (рис. 1). Плёнка имеет две поверхности (внешнюю и внутреннюю), поэтому по линии разреза длиной $2\pi R$ на неё тянет левая половина с силой $2 \cdot \sigma \cdot 2\pi R$ влево. Давление воздуха изнутри превышает наружное на Δp и выталкивает половину вправо с силой $\Delta p \cdot \pi R^2$ (проекция сил давления на сферу равна давлению, умноженному на площадь круга сечения). Плёнка покоится:

$$\Delta p\, \pi R^2 = 4\pi\sigma R \quad \Longrightarrow \quad \Delta p = \frac{4\sigma}{R}.$$

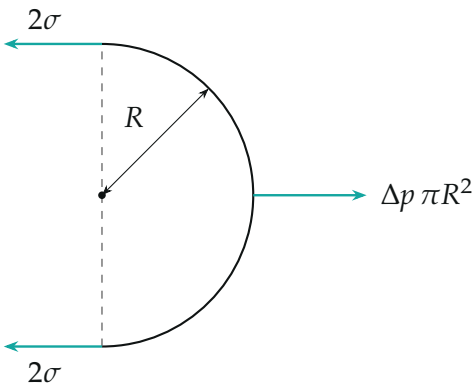


Рис. 1. Правая половина плёнки: слева тянет вторая половина (две поверхности, на единицу длины линии разреза 2σ), справа выталкивает перепад давления Δp.

Радиус пузыря входит в Δp в первой степени в знаменателе: чем меньше пузырь, тем сильнее он давит на воздух. Для обычного пузыря ($\sigma \approx 0{,}03$ Н/м, $R \approx 2$ см) $\Delta p \approx 6$ Па, это на пять порядков меньше $p_0 \approx 10^5$ Па, поэтому воздух при вытекании считаем несжимаемым: объём вышедшего из пузыря воздуха равен убыли объёма пузыря.

2. Течение воздуха по трубке. Выделим столб воздуха в трубке. Слева на него давит воздух из пузыря (давление $p_0 + \Delta p$), справа — атмосфера (p_0), результирующая сила $\Delta p \cdot \pi r^2$ направлена к выходу. Воздух течёт медленно, без ускорения, значит эта сила уравновешена вязким трением о стенки. При ламинарном течении трение пропорционально скорости: $F_{\text{тр}} = \beta V$, где β зависит только от трубки и вязкости воздуха и одинакова в обоих опытах (трубка и воздух те же). Поэтому

$$\Delta p\, \pi r^2 = \beta V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{\pi r^2}{\beta}\,\Delta p.$$

Объёмный расход $Q = \pi r^2 V$ также пропорционален Δp:

$$Q = A\,\Delta p, \qquad A = \frac{\pi^2 r^4}{\beta} = \text{const}.$$

(Строгий закон Пуазёйля даёт $A = \dfrac{\pi r^4}{8\eta\ell}$ с вязкостью воздуха η, но для ответа нужна только пропорциональность.) Значит, скорость вытекания воздуха из сдувающегося пузыря не постоянна: с уменьшением R перепад $\Delta p = 4\sigma/R$ растёт и воздух вытекает быстрее.

3. Уравнение сдувания. Скорость убывания объёма пузыря $V_{\text{п}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ равна расходу воздуха через трубку:

$$-\frac{dV_{\text{п}}}{dt} = Q \quad \Longrightarrow \quad -4\pi R^2\,\frac{dR}{dt} = A\,\frac{4\sigma}{R} \quad \Longrightarrow \quad R^3\,dR = -\frac{A\sigma}{\pi}\,dt.$$

Интегрируем от начального радиуса R_0 (при $t = 0$) до $R = 0$ (при $t = T$), где T — время полного сдувания:

$$\int_{R_0}^{0} R^3\,dR = -\frac{A\sigma}{\pi}\int_0^T dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{R_0^4}{4} = \frac{A\sigma}{\pi}\,T \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{\pi}{4A\sigma}\,R_0^4.$$

Подставив $A = \dfrac{\pi r^4}{8\eta\ell}$, получаем $T = \dfrac{2\eta\ell}{\sigma r^4}\,R_0^4$. Для нас важно, что вре-

мя сдувания пропорционально четвёртой степени начального радиуса, а коэффициент $\dfrac{\pi}{4A\sigma}$ у обоих пузырей один и тот же (трубка, вязкость воздуха и плёнка те же).

4. Зависимость от радиуса. Для первого пузыря $T = \tau$ при радиусе R_0, для второго радиус $2R_0$, и

$$\frac{T_2}{\tau} = \left(\frac{2R_0}{R_0}\right)^4 = 16 \quad \Longrightarrow \quad T_2 = 16\tau.$$

Радиус в ходе сдувания меняется по закону $R(t) = R_0\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)^{1/4}$ (из интеграла в пункте 3 с переменным верхним пределом): R^4 убывает со временем линейно, одинаково быстро у обоих пузырей, потому что $\dfrac{d(R^4)}{dt} = -\dfrac{4A\sigma}{\pi}$ не зависит от радиуса (рис. 2).

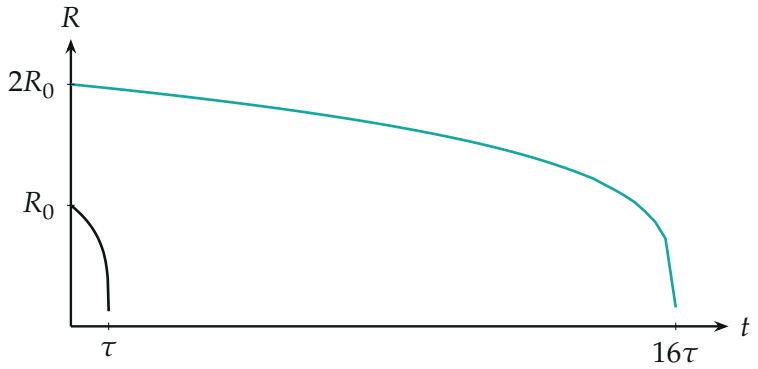


Рис. 2. Радиус пузыря как функция времени: $R = R_0\,(1 - t/T)^{1/4}$. Чёрная кривая — пузырь радиуса R_0 (сдувается за τ), бирюзовая — радиуса $2R_0$ (за 16τ). Скорость убывания радиуса растёт к концу: последние секунды самые быстрые.

Обратите внимание. (1) Время сдувания — не 2τ и не 4τ: при вдвое большем радиусе объём больше в восемь раз, а скорость вытекания воздуха меньше вдвое (перепад давления $\propto 1/R$), отсюда $8 \cdot 2 = 16$. (2) Множитель 4 в $\Delta p = 4\sigma/R$ (две поверхности плёнки) на ответ не влияет:

важна только зависимость $\Delta p \propto 1/R$. (3) Пропорциональность расхода перепаду давления — условие «воздух движется достаточно медленно»: при быстром течении сила сопротивления была бы пропорциональна квадрату скорости, и ответ был бы другим.

Проверка. Размерность: $[\eta] = \text{Па}\cdot\text{с}$, $[\sigma] = \text{Н/м} = \text{Па}\cdot\text{м}$, поэтому $\left[\dfrac{\eta \ell R_0^4}{\sigma r^4}\right] = \dfrac{\text{Па}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{Па}\cdot\text{м}} = \text{с}$. При $t = T$ закон $R(t)$ даёт $R = 0$, а расход $Q \propto 1/R$ к концу растёт: последние секунды самые быстрые (график на рис. 2 обрывается вертикально). Второй способ — оценка: время $\sim$ объём/расход $\sim R_0^3/(1/R_0) = R_0^4$, откуда $T_2/T_1 = 2^4 = 16$.

Смысл: чем крупнее пузырь, тем больше воздуха надо выпустить и тем слабее напор плёнки на него, поэтому время растёт очень быстро — как четвёртая степень радиуса.

Ответ. Пузырь вдвое большего радиуса сдуется за время 16τ.