Бесконечная сетка с ромбами

Задача 4. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 4] В бесконечную проволочную сетку, состоящую из шестиугольников с сопротивлениями каждого ребра r (см. рис. 1), добавили проводники с такими же сопротивлениями — так, как показано на рис. 2 (каждую шестиугольную ячейку разделили тремя отрезками проволоки сопротивлением r каждый на три одинаковых ромба). Найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B, показанными на рис. 2.

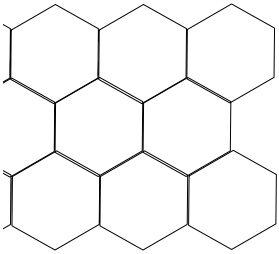


Рис. 1.

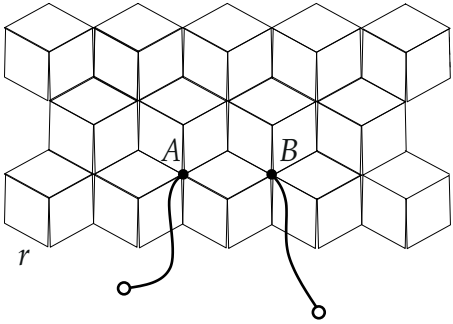


Рис. 2.

▲ **Решение. Что происходит.** Сетка бесконечна, составить и решить систему уравнений для всех узлов нельзя. Но сетка очень симметрична: поворот на 60° вокруг узла A (или B) переводит её в себя, а все проводники одинаковы. Эту симметрию используют так: ток от A к B представляют суммой двух простых токов, в каждом из которых токи вблизи узла находятся из симметрии. Первый ток — I втекает в A и растекается по сетке в бесконечность. Второй — ток I приходит из бесконечности и вытекает из сетки через B. При сложении токи «на бесконечности» сокращаются, остаются ток I в узел A и такой же ток из узла B. Законы: сохранение заряда в узле (первое правило Кирхгофа), закон Ома для проводника, принцип суперпозиции (сетка линейна, токи складываются).

Строение сетки. Каждый шестиугольник разбит тремя отрезками на три ромба. В вершинах ромбов с углом 60° сходятся шесть ромбов и

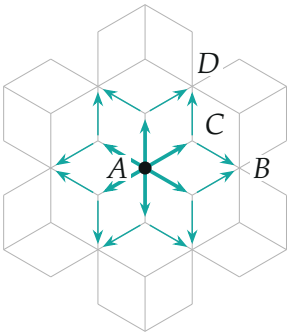
шесть проводников (узлы типа A и B на рис. 2), в вершинах с углом 120° — три ромба и три проводника. Узлы A и B — два ближайших узла первого типа: прямого проводника между ними нет, они соединены двумя путями $A-C-B$ и $A-C'-B$ через трёхпроводные узлы C и C', общие для A и B (рис. 4). Все проводники — сопротивлением r.

Обозначения. I — полный ток, входящий в сетку через A и выходящий через B; C, C' — два узла, соединённые проводниками и с A, и с B; D — третий сосед узла C (кроме A и B).

1. Ток I втекает в A и уходит в бесконечность. Вокруг A все шесть проводников одинаковы и симметрично расположены (поворот на 60° переводит картину в себя), поэтому ток в каждом из них один и тот же: по закону сохранения заряда в узле A он равен $I/6$ (рис. 3а). Дальше ток течёт от соседнего узла C по двум оставшимся проводникам — к B и к D. Прямая AC — ось симметрии сетки, она меняет местами B и D (и токи, текущие к ним), значит токи по CB и CD равны. Закон сохранения заряда для узла C: $\dfrac{I}{6} = I_{CB} + I_{CD}$, откуда

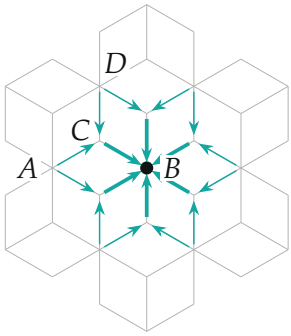
$$I_{AC}^{(1)} = \frac{I}{6}, \qquad I_{CB}^{(1)} = \frac{I}{12}.$$

а) ток из A в бесконечность



$I/6$ $I/12$

б) ток из бесконечности в B



$I/6$ $I/12$

Рис. 3. Два простых случая: (а) ток I втекает в A и растекается в бесконечность; (б) ток I приходит из бесконечности и вытекает через B. Из шести проводников узла токи по $I/6$ (толстые стрелки), в следующих проводниках $I/12$ (тонкие стрелки).

2. Ток I приходит из бесконечности и вытекает через B. Это то же самое с обратными стрелками. В узел B по каждому из шести проводников приходит ток $I/6$, в частности от C к B идёт $I/6$. К узлу C ток подходит от двух соседей, A и D, поровну (прямая BC — ось симметрии, она меняет A и D местами); закон для узла C: $\dfrac{I}{6} = I_{AC} + I_{DC}$, откуда (рис. 3б)

$$I^{(2)}_{CB} = \frac{I}{6}, \qquad I^{(2)}_{AC} = \frac{I}{12}.$$

3. Сложение. В сумме двух случаев в узел A втекает ток I, из узла B вытекает I, а токи на бесконечности взаимно уничтожаются: это и есть искомый ток от A к B. Токи в проводниках складываются (направления: в первом случае от A к C и от C к B, во втором — тоже от A к C и от C к B, рис. 3):

$$I_{AC} = \frac{I}{6} + \frac{I}{12} = \frac{I}{4}, \qquad I_{CB} = \frac{I}{12} + \frac{I}{6} = \frac{I}{4}.$$

То же верно для пути через C' (сетка симметрична относительно прямой AB). Через два пути $A{-}C{-}B$ и $A{-}C'{-}B$ идёт $I/2$ всего тока, остальная половина идёт другими проводниками (рис. 4).

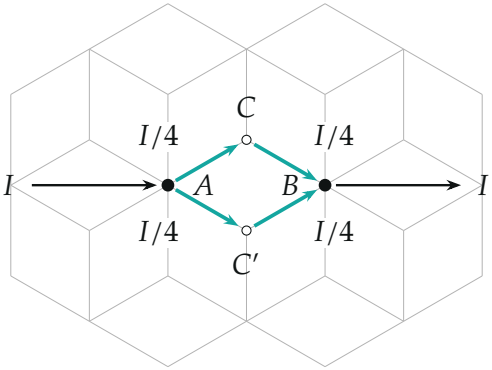


Рис. 4. Суммарные токи вблизи A и B: по каждому из четырёх проводников AC, CB, AC', $C'B$ течёт ток $I/4$ (бирюзовые стрелки), I — полный ток через сетку.

4. Сопротивление. Напряжение между A и B равно сумме напряжений на проводниках любого пути между ними, например $A-C-B$. По закону Ома для участка цепи

$$U_{AB} = I_{AC}\,r + I_{CB}\,r = \frac{I}{4}r + \frac{I}{4}r = \frac{Ir}{2}, \qquad R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{r}{2}.$$

Через путь $A-C'-B$ напряжение получается тем же, $\dfrac{Ir}{2}$, как и должно быть для двух точек сетки.

Обратите внимание. (1) Токи по проводникам, которые входят в сумму, надо складывать с учётом направления; здесь в обоих случаях направление на AC и CB одно и то же ($A \to C \to B$), поэтому токи складываются, а не вычитаются. (2) Метод «ток в бесконечность» работает потому, что сетка бесконечна и одинакова во всех направлениях: никакого определённого «второго электрода» нет, ток просто расходится по всем направлениям. (3) Прямого проводника AB нет: ближайший путь — через C, поэтому ответ $r/2$ меньше сопротивления одного такого пути $2r$.

Проверка. Верхняя оценка: если оставить только четыре проводника ромба $ACBC'$ (выбросить остальную сетку), то сопротивление между A и B — два пути по $2r$ параллельно, r. Выбросить проводники можно только увеличив сопротивление, поэтому в полной сетке $R_{AB} \le r$; ответ $r/2$ этому не противоречит. Размерность: сопротивление выражено через r. Второй способ — расчёт: сопротивление между двумя такими соседними узлами на конечной сетке (около 1700 узлов, периодические границы), составленной тем же правилом, получается $0{,}499\,r$, а при росте сетки стремится к $r/2$.

Смысл: из-за высокой симметрии токи вокруг узла делятся поровну, и точка A «видит» шесть одинаковых проводников, откуда ответ получается без решения бесконечной системы уравнений.

Ответ. $R_{AB} = \dfrac{r}{2}$.