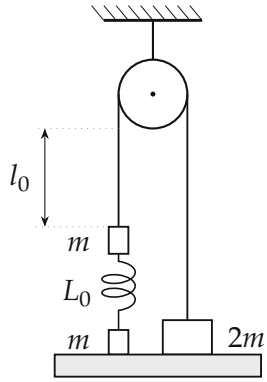
Падающие грузы и пружина

Задача 5. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 5] На рисунке изображена механическая система, в которой через невесомый блок с прикреплённой к потолку горизонтальной осью перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены небольшие грузы массами m и $2m$. Груз $2m$ лежит на горизонтальной опоре. Груз m висит. К грузу m через невесомую идеальную пружину с жёсткостью k, расположенную вертикально и имеющую небольшую длину L_0, прикреплён второй такой же груз m. В начальный момент пружина не деформирована, и второй груз m лежит на той же опоре, что и груз $2m$. Расстояние от верхнего груза m до блока равно l_0. Свободные участки нити, не лежащие на шкиве блока, вертикальны. В момент времени $t = 0$ опора исчезает (её быстро убирают вниз). Через время τ после этого один из грузов коснулся блока. Какой это груз? При каком значении l_0 время τ максимально? Чему равно это максимальное значение τ?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на колебания связанных тел. Без опоры нижний груз m падает, а груз $2m$ тянет верхний m через блок вверх; растянутая пружина тормозит этот подъём. Растяжение пружины колеблется гармонически, верхний груз поднимается и опускается обратно. Блок выше верхней точки недостижим, поэтому самое позднее касание — ровно в ней. Законы: второй закон Ньютона для каждого

из трёх грузов, кинематическая связь грузов через нерастяжимую нить, закон Гука.

Обозначения. Ось x направлена вниз (вдоль силы тяжести), начало отсчёта — у блока (рис. 1). x_1, x_3 — координаты верхнего и нижнего грузов m, x_2 — координата груза $2m$, $a_i = \ddot{x}_i$. T — сила натяжения нити, $\Delta = x_3 - x_1 - L_0$ — удлинение пружины (в начальный момент $\Delta = 0$), $k\Delta$ — сила упругости.

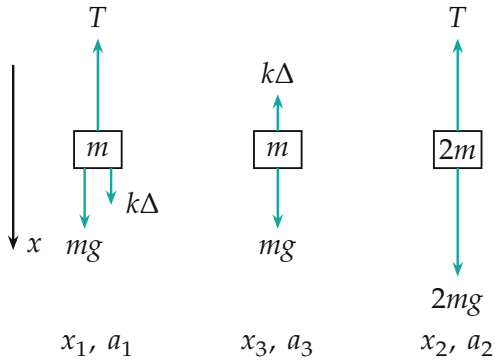


Рис. 1. Ось x вниз и силы на каждый груз (пружина растянута: тянет верхний груз вниз, а нижний вверх).

1. Связи. Нить нерастяжима, длина нити $x_1 + x_2 + \text{const}$ постоянна, откуда $a_2 = -a_1$. Расстояние между грузами m равно $x_3 - x_1 = L_0 + \Delta$, откуда $\ddot{\Delta} = a_3 - a_1$.

2. Второй закон Ньютона. Проекции на ось x (вниз). Верхний груз m: вниз тянут сила тяжести mg и растянутая пружина $k\Delta$, вверх — нить T. Груз $2m$: вниз $2mg$, вверх T. Нижний m: вниз mg, вверх пружина $k\Delta$:

$$ma_1 = mg + k\Delta - T, \qquad 2ma_2 = 2mg - T, \qquad ma_3 = mg - k\Delta.$$

Нить и блок невесомы, поэтому T по обе стороны блока одинакова. Из второго уравнения при $a_2 = -a_1$: $T = 2mg + 2ma_1$; подставляем в первое:

$$ma_1 = mg + k\Delta - 2mg - 2ma_1 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \frac{k\Delta - mg}{3m}.$$

В начальный момент $\Delta = 0$ и $a_1 = -g/3$ — как в машине Атвуда с грузами m и $2m$, а нижний груз падает свободно, $a_3 = g$.

3. Колебания. Из третьего уравнения и найденного a_1:

$$\ddot{\Delta} = a_3 - a_1 = g - \frac{k\Delta}{m} - \frac{k\Delta - mg}{3m} = \frac{4g}{3} - \frac{4k}{3m}\Delta = \frac{4k}{3m}\left(\frac{mg}{k} - \Delta\right).$$

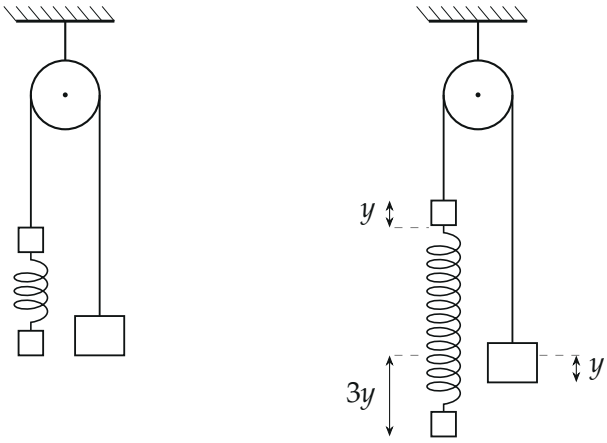
Это уравнение гармонических колебаний Δ около $\Delta_0 = mg/k$ с циклической частотой $\omega = \sqrt{4k/(3m)}$. При $\Delta(0) = 0$, $\dot{\Delta}(0) = 0$

$$\Delta(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega t) \geq 0, \qquad a_1 = \frac{k\Delta - mg}{3m} = -\frac{g}{3}\cos\omega t :$$

пружина всё время растянута. Интегрируем a_1 дважды с нулевой начальной скоростью; высота подъёма верхнего груза $y = x_1(0) - x_1(t)$:

$$y(t) = \frac{g}{3\omega^2}(1 - \cos\omega t) = \frac{mg}{4k}(1 - \cos\omega t).$$

Видно, что $\Delta = 4y$ в любой момент: нижний груз опускается на $3y$, а груз $2m$ — на y (рис. 2).



$t = 0$ в момент t

Рис. 2. Состояние системы в момент $t = 0$ и в произвольный момент: верхний груз поднялся на y, груз $2m$ опустился на y, нижний груз опустился на $3y$,

пружина удлинилась на $4y$.

4. Какой груз коснётся блока. Груз $2m$ опускается на $y \geq 0$ — уходит от блока, нижний груз всегда ниже верхнего на $L_0 + \Delta \geq L_0$. Блока достигнет только верхний груз m; он поднимается до $y_{\max} = mg/(2k)$ (при $\omega t = \pi$) и обратно. Нить при этом остаётся натянутой: $T = 2mg + 2ma_1 = 2mg\left(1 - \dfrac{\cos \omega t}{3}\right) \geq \dfrac{4}{3}mg > 0$.

5. Время касания и его максимум. Верхний груз коснётся блока, когда поднимется на l_0 (размерами грузов пренебрегаем): $y(\tau) = l_0$,

$$\frac{mg}{4k}(1 - \cos \omega\tau) = l_0 \quad \Longrightarrow \quad \tau = \frac{1}{\omega}\arccos\left(1 - \frac{4kl_0}{mg}\right),$$

$\omega\tau \in [0, \pi]$. Касание возможно только при $l_0 \leq y_{\max}$ (рис. 3), и τ растёт с l_0, поэтому максимум — при $l_0 = y_{\max}$:

$$l_0 = \frac{mg}{2k}: \qquad \cos \omega\tau = -1, \quad \omega\tau = \pi, \qquad \tau_{\max} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{3m}{4k}}.$$

Это половина периода: груз касается блока, остановившись в верхней точке.

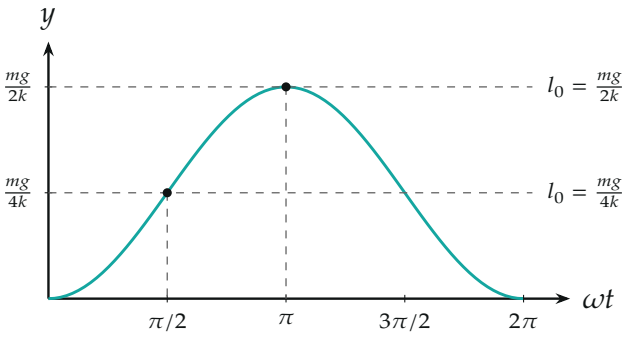


Рис. 3. Подъём верхнего груза $y(t)$. Горизонтальная прямая — расстояние до блока l_0: пока $l_0 < mg/(2k)$, она пересекает график (груз касается блока), при $l_0 = mg/(2k)$ касается его вершины ($\omega t = \pi$, время максимально); выше вершины груз блока не достигает.

Обратите внимание. (1) Блока касается именно верхний груз m, а не $2m$: груз $2m$ идёт вниз, а нижний m не может подняться выше верхнего. (2) Начальное ускорение верхнего груза $g/3$ — как в блоке без пружины, а не g: пружина в первый момент не деформирована и сила на верхний груз от неё равна нулю.

Проверка. Размерность: m/k — с^2, mg/k — метры. Закон сохранения энергии в верхней точке ($\omega t = \pi$, все скорости нулевые): верхний груз поднялся на $y = mg/(2k)$, груз $2m$ опустился на y, нижний — на $3y$, пружина растянута на $4y = 2mg/k$; $\dfrac{m^2g^2}{k}\left(\dfrac{1}{2} - 1 - \dfrac{3}{2} + 2\right) = 0$ — энергия сохраняется. Предел $k \to \infty$: грузы m — одно тело $2m$, система уравновешена, $y_{\max} \to 0$ и $\tau_{\max} \to 0$.

Смысл: подъём верхнего груза ограничен пружиной, и самое долгое ожидание — когда он доходит до блока ровно в самой высокой точке.

Ответ. Блока первым коснётся верхний груз m; время τ максимально при $l_0 = \dfrac{mg}{2k}$ и равно $\tau_{\max} = \pi\sqrt{\dfrac{3m}{4k}}$.