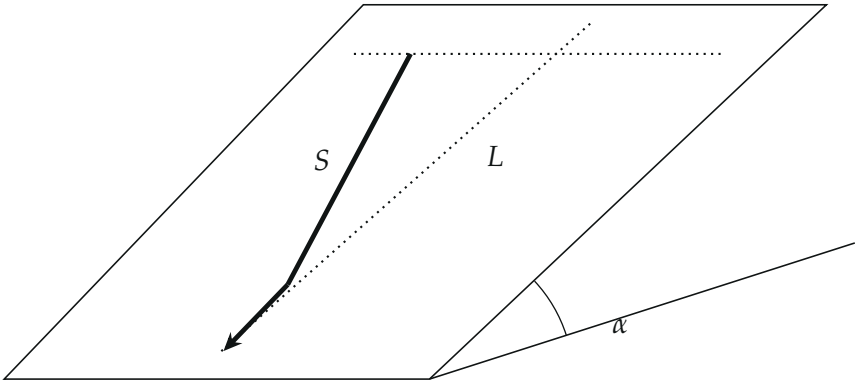
Стержень на наклонной плоскости

Задача 6. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 6] Тонкий однородный жёсткий стержень S скользит по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В начальный момент времени нижний конец стержня движется вниз вдоль наклонной плоскости (по линии L «падения воды», как указано стрелкой — см. рисунок), а верхний конец стержня движется горизонтально, причём модуль скорости верхнего конца в два раза больше, чем нижнего. По прошествии некоторого промежутка времени оказалось, что середина стержня сместилась на одинаковые расстояния по горизонтали и вдоль линии «падения воды». Во сколько раз изменился модуль скорости середины стержня за этот промежуток времени?



▲ **Решение. Что происходит.** Стержень жёсткий, поэтому скорости его концов не независимы: проекции скоростей концов на ось стержня равны. Направления и отношение модулей скоростей концов известны — отсюда находится наклон стержня и скорость середины в начальный момент. Дальше стержень скользит по гладкой плоскости, значит вдоль неё на него действует только составляющая силы тяжести $mg\sin\alpha$, направленная вдоль линии падения воды L. Середина однородного стержня — его центр масс, поэтому по теореме о движении центра масс она движется с постоянным ускорением $g\sin\alpha$ вдоль L и без ускорения поперёк, как брошенное тело, а вращение стержня на это не влияет. Условие равных смещений даёт время, и скорость середины в конце считается

как у брошенного тела. Законы: кинематика твёрдого тела (проекции скоростей на ось стержня; скорость середины — полусумма скоростей концов), теорема о движении центра масс, кинематика с постоянным ускорением.

Обозначения. Ось x — горизонтально вдоль плоскости, ось y — вдоль линии падения воды вниз по плоскости (рис. 1). B — нижний конец стержня, A — верхний, O — середина, ℓ — длина стержня, v — модуль скорости нижнего конца, θ — угол между стержнем и линией L, $g' = g\sin\alpha$, $\vec{V}_{O1}$, $\vec{V}_{O2}$ — скорость середины в начальный момент и в конце промежутка.

1. Угол между стержнем и линией падения воды. Стержень жёсткий: расстояние между концами не меняется, значит проекции скоростей концов на прямую AB равны. Скорость $\vec{v}_B$ направлена вдоль L и составляет со стержнем угол θ, проекция на ось стержня равна $v\cos\theta$ (по модулю). Скорость $\vec{v}_A$ горизонтальна, перпендикулярна L, и составляет со стержнем угол $90^\circ - \theta$; её проекция равна $2v\cos(90^\circ - \theta) = 2v\sin\theta$. Приравниваем проекции:

$$v\cos\theta = 2v\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \tan\theta = \frac{1}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Знак проекции у обоих концов один, поэтому верхний конец A, расположенный правее нижнего, движется влево (рис. 1).

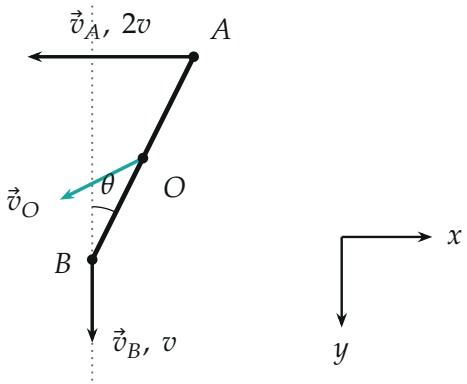


Рис. 1. Скорости концов стержня и его середины в начальный момент; пунк-

тир — линия падения воды L через нижний конец; ось y направлена вниз по плоскости.

2. Скорость середины в начальный момент. Середина O — середина отрезка AB: $\vec{r}_O = (\vec{r}_A + \vec{r}_B)/2$. Дифференцируем: скорость середины равна полусумме скоростей концов. Проекции на оси x (вправо) и y (вниз):

$$V_{O1x} = \frac{-2v + 0}{2} = -v, \qquad V_{O1y} = \frac{0 + v}{2} = \frac{v}{2},$$

$$V_{O1} = \sqrt{v^2 + \frac{v^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,v.$$

3. Движение середины. Поскольку плоскость гладкая, на стержень действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция плоскости; нормальная реакция перпендикулярна плоскости и вдоль неё ничего не даёт. Вдоль плоскости остаётся составляющая $mg\sin\alpha$ вдоль линии падения воды. Теорема о движении центра масс (второй закон Ньютона для центра масс):

$$m\,a_x = 0, \qquad m\,a_y = mg\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad a_x = 0, \quad a_y = g'.$$

Середина движется по параболе, как тело, брошенное под углом (рис. 2), со смещениями за время t

$$\Delta x = -vt, \qquad \Delta y = \frac{v}{2}\,t + \frac{g't^2}{2}.$$

4. Время. По условию середина сместилась на одинаковые расстояния по горизонтали и вдоль линии падения воды: $|\Delta x| = \Delta y$:

$$vt = \frac{v}{2}\,t + \frac{g't^2}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{vt}{2} = \frac{g't^2}{2} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{v}{g'}$$

(корень $t = 0$ отвечает началу движения). Смещения тогда равны $\Delta x = -\dfrac{v^2}{g'}$ и $\Delta y = \dfrac{v^2}{g'}$.

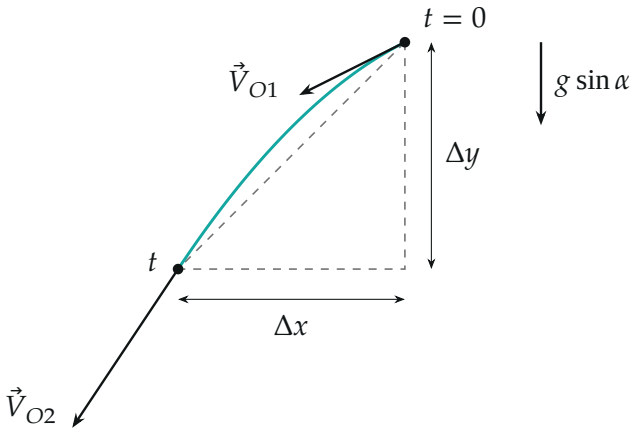


Рис. 2. Траектория середины стержня (парабола): к моменту $t = v/g'$ она сместилась на одинаковые расстояния $\Delta x = \Delta y = v^2/g'$ (диагональ пунктиром).

5. Скорость в конце промежутка. К моменту $t = v/g'$ проекции скорости середины:

$$V_{O2x} = -v, \qquad V_{O2y} = \frac{v}{2} + g't = \frac{v}{2} + v = \frac{3v}{2},$$

$$V_{O2} = \sqrt{v^2 + \frac{9v^2}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}\,v.$$

Отношение модулей скорости:

$$\frac{V_{O2}}{V_{O1}} = \frac{\sqrt{13}\,v/2}{\sqrt{5}\,v/2} = \sqrt{\frac{13}{5}} \approx 1{,}61.$$

Обратите внимание. (1) Горизонтальная составляющая скорости середины не меняется ($-v$), потому что вдоль плоскости поперёк линии падения воды сил нет; меняется только составляющая вдоль L. (2) Ответ не зависит ни от α, ни от длины стержня, ни от самой скорости v: время $t = v/g'$ сокращает g'. (3) Скорость середины — это скорость центра масс, а скорости концов и стержня в целом в конце промежутка нас не интересуют: вращение стержня на движение центра масс не влияет.

Проверка. Второй способ нахождения V_{O1} — через мгновенный центр скоростей P (рис. 3). Он лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям концов: к $\vec{v}_B$ — горизонталь через B, к $\vec{v}_A$ — вертикаль (вдоль L) через A. Они перпендикулярны друг другу, значит $\angle APB = 90°$, и середина O гипотенузы AB — центр описанной окружности: $PO = \ell/2$. Угловая скорость $\omega = \dfrac{v_B}{PB} = \dfrac{v}{\ell \sin\theta} = \dfrac{\sqrt{5}\,v}{\ell}$, откуда $v_A = \omega \cdot PA = \dfrac{\sqrt{5}\,v}{\ell}\,\ell\cos\theta = 2v$ (совпало с условием) и $V_{O1} = \omega \cdot PO = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,v$ — как в пункте 2.

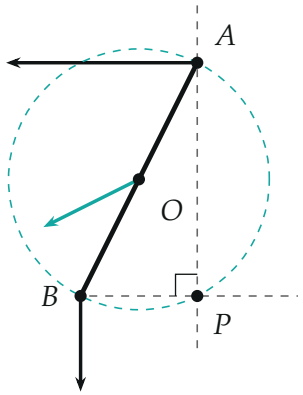


Рис. 3. Мгновенный центр скоростей P: пересечение перпендикуляров к скоростям концов; O — центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника APB.

Смысл: центр масс стержня движется как брошенная частица, и всё, что нужно знать о вращении, — начальную скорость середины.

Ответ. Модуль скорости середины стержня увеличился в $\dfrac{V_{O2}}{V_{O1}} = \sqrt{\dfrac{13}{5}} \approx 1{,}61$ раза.