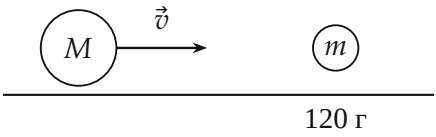
Упругий удар двух шаров

Задача 7. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 7] Вдоль гладкой горизонтальной поверхности скользит шар неизвестной массы в направлении другого покоящегося шара массой 120 г. В некоторый момент времени происходит абсолютно упругое лобовое соударение этих шаров, в результате которого первый шар передаёт второму 64% своей кинетической энергии. Опыт повторяют, заменив движущийся шар шаром другой массы, но не изменив его начальной скорости. Оказалось, что в результате второго опыта доля переданной покоящемуся шару кинетической энергии не изменилась. Определите, на какую величину Δm отличались массы движущихся шаров в двух опытах.



Поясняющий рисунок. Налетающий шар массой M (неизвестной) со скоростью $\vec{v}$ и покоящийся шар массой $m = 120$ г.

▲ **Решение. Что происходит.** Лобовой упругий удар происходит вдоль одной прямой, поэтому все скорости направлены вдоль неё. Долю энергии, переданной покоящемуся шару, проще всего найти в системе отсчёта центра масс: там суммарный импульс равен нулю, и при упругом ударе шары просто разворачиваются с прежними по модулю скоростями. Из этого следует, что покоившийся шар после удара получает скорость, вдвое большую скорости центра масс. Доля энергии зависит только от отношения масс $x = M/m$, и симметрична относительно замены $x \to 1/x$, поэтому уравнение на x имеет два взаимно обратных корня — это и есть массы двух опытов. Законы: сохранение импульса, сохранение механической энергии при упругом ударе, переход в систему отсчёта центра масс.

Обозначения. M — масса налетающего шара, $m = 120$ г — масса покоящегося, $x = M/m$, v — начальная скорость налетающего шара (одинаковая в обоих опытах), V_c — скорость центра масс, η — доля

начальной кинетической энергии, переданная покоившемуся шару. Ось x направлена по скорости $\vec{v}$.

1. Скорость покоившегося шара после удара. Скорость центра масс системы двух шаров (в проекции на ось x) — отношение суммарного импульса к суммарной массе; импульс при ударе сохраняется, поэтому V_c постоянна:

$$V_c = \frac{Mv + m \cdot 0}{M + m} = \frac{M}{M + m} v.$$

В системе отсчёта центра масс (рис. 1) налетающий шар до удара имеет скорость $v - V_c$, покоящийся — $-V_c$. Суммарный импульс в этой системе равен нулю и после удара тоже. Кинетическая энергия сохраняется (упругий удар). Для двух шаров условия «импульс равен нулю» и «энергия не изменилась» дают только разворот: каждая скорость меняет знак, а модуль остаётся прежним. После удара покоившийся шар в системе центра масс движется со скоростью $+V_c$ (вперёд), налетающий — $-(v - V_c)$. Возвращаемся в лабораторную систему (прибавляем V_c): скорость покоившегося шара

$$u_2 = V_c + V_c = 2V_c = \frac{2M}{M + m} v,$$

скорость налетающего $u_1 = -(v - V_c) + V_c = 2V_c - v = \dfrac{M - m}{M + m} v.$

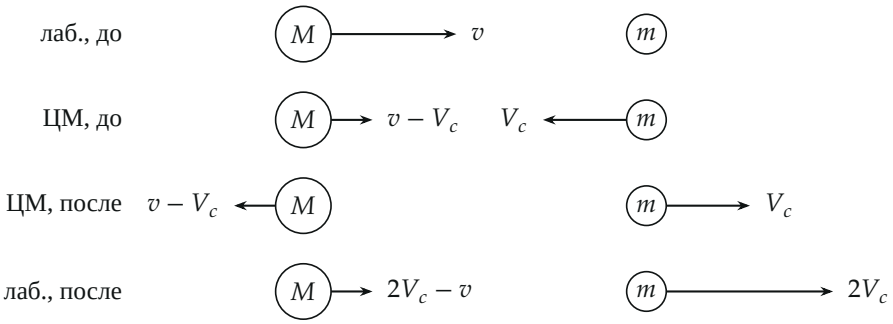


Рис. 1. Удар в лабораторной системе отсчёта и в системе центра масс

(рисунок для $M > m$; длины стрелок пропорциональны скоростям при $M = 2m$): в системе центра масс скорости шаров только меняют знак.

2. Доля переданной энергии. Покоившийся шар после удара имеет кинетическую энергию $\dfrac{mu_2^2}{2}$, начальная энергия налетающего шара $\dfrac{Mv^2}{2}$:

$$\eta = \frac{mu_2^2}{Mv^2} = \frac{m}{M}\cdot\frac{4M^2}{(M+m)^2} = \frac{4Mm}{(M+m)^2} = \frac{4x}{(1+x)^2}.$$

Эта доля не меняется, если x заменить на $1/x$ (то есть поменять шары ролями), и равна 1 при $x = 1$ (шары одинаковые: налетающий останавливается и отдаёт всё).

3. Уравнение для отношения масс. По условию $\eta = 0{,}64$:

$$\frac{4x}{(1+x)^2} = 0{,}64 \quad\Longrightarrow\quad 4x = 0{,}64\,(1+x)^2 \quad\Longrightarrow\quad x^2 - \frac{17}{4}\,x + 1 = 0.$$

Дискриминант $D = \left(\dfrac{17}{4}\right)^2 - 4 = \dfrac{225}{16}$, корни

$$x = \frac{17/4 \pm 15/4}{2} \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 4, \qquad x_2 = \frac{1}{4}.$$

Произведение корней равно 1 (теорема Виета), как и должно быть из-за симметрии $x \to 1/x$. Оба корня отвечают условию (рис. 3): шары «другой массы» — это два разных корня.

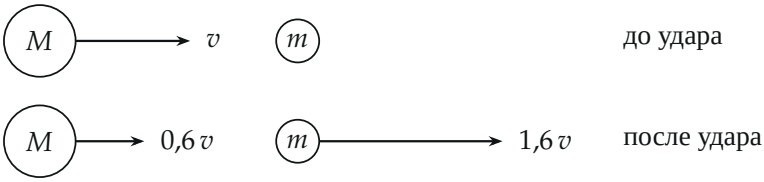
4. Массы и их разность. При $m = 120$ г массы налетающего шара в двух опытах

$$M_1 = 4m = 480\text{ г}, \qquad M_2 = \frac{m}{4} = 30\text{ г},$$

и

$$\Delta m = M_1 - M_2 = \left(4 - \frac{1}{4}\right)m = \frac{15}{4}\cdot 120\text{ г} = 450\text{ г}.$$

Опыт 1: $M_1 = 4m$ (налетающий шар тяжелее)



Опыт 2: $M_2 = m/4$ (налетающий шар легче, отскакивает)

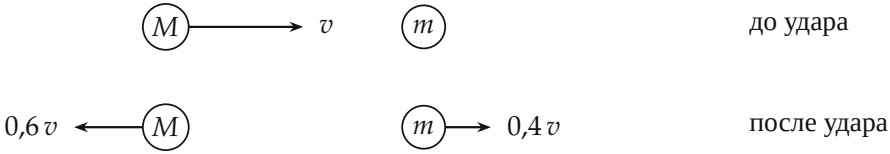


Рис. 2. Два опыта (размеры шаров условные): скорости после удара $u_1 = \frac{M-m}{M+m}v$, $u_2 = \frac{2M}{M+m}v$. В опыте 1 налетающий шар продолжает движение вперёд, в опыте 2 — отскакивает назад; доля энергии, переданной шару m, в обоих опытах 0,64.

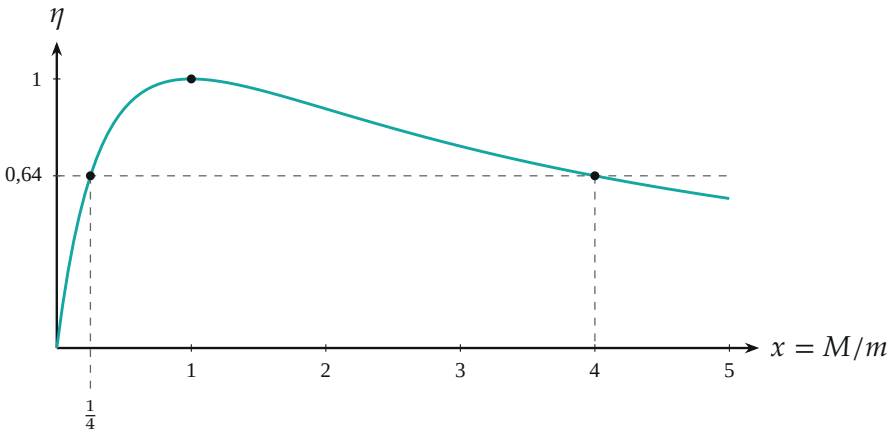


Рис. 3. Доля переданной энергии $\eta(x) = \frac{4x}{(1+x)^2}$: прямая $\eta = 0{,}64$ пересекает график в двух точках $x = \frac{1}{4}$ и $x = 4$; максимум $\eta = 1$ при $x = 1$.

Обратите внимание. (1) Уравнение для x даёт два корня, и оба нужны: условие «масса другая» исключает совпадение корней (иначе $\Delta m =$

0). (2) Ответ не зависит от начальной скорости: v сократилось в η. (3) Формула $u_2 = 2V_c$ верна именно для упругого лобового удара по покоящемуся шару; для неупругого удара скорость была бы другой.

Проверка. Подставим результат в оба закона сохранения. Опыт 1 ($M = 4m$, $u_1 = 0{,}6v$, $u_2 = 1{,}6v$): импульс $4m \cdot 0{,}6v + m \cdot 1{,}6v = 4mv$ — равен начальному $4mv$; энергия $\frac{1}{2} \cdot 4m \cdot 0{,}36v^2 + \frac{1}{2} m \cdot 2{,}56v^2 = 2mv^2$ — равна начальной $\frac{1}{2} \cdot 4mv^2$; доля $\frac{1{,}28}{2} = 0{,}64$. Опыт 2 ($M = \frac{m}{4}$, $u_1 = -0{,}6v$, $u_2 = 0{,}4v$): импульс $\frac{m}{4}(-0{,}6v) + m \cdot 0{,}4v = 0{,}25mv$ — равен начальному; энергия $0{,}045mv^2 + 0{,}08mv^2 = 0{,}125mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{4} v^2$; доля $\frac{0{,}08}{0{,}125} = 0{,}64$. Размерность: η безразмерна, масса в граммах.

Смысл: при одинаковой доле передачи энергии налетающий шар либо в четыре раза тяжелее покоящегося, либо в четыре раза легче, и массы, как у зеркальной пары, отличаются на $\left(4 - \frac{1}{4}\right) m$.

Ответ. Массы движущихся шаров в двух опытах отличались на $\Delta m = 450$ г (480 г и 30 г).