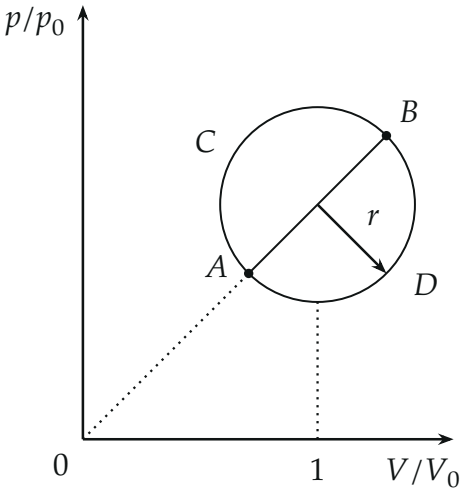
Две тепловые машины на одной окружности

Задача 8. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 8] Две тепловые машины используют в качестве рабочего тела постоянное количество одноатомного идеального газа. Циклы, по которым работают эти машины, при изображении в координатах «давление-объём» при некотором выборе масштабов являются двумя половинами одной окружности: первая машина работает по циклу $ACBA$, а вторая — по циклу $ABDA$ (см. рисунок). Диаметр AB этой окружности лежит на прямой, проходящей через начало координат, и обладает тем свойством, что на участке цикла ACB газ только получает теплоту от нагревателя, а на участке BDA — только отдаёт теплоту нагревателю. Центр окружности соответствует объёму V_0, радиус окружности при выбранном масштабе равен $r = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Во сколько раз максимально возможный КПД второй машины отличается от максимально возможного КПД первой машины?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача о КПД циклов на pV-диаграмме. Оба цикла — половины одного круга, поэтому работа W у них одна. КПД — работа, делённая на полученную теплоту: первая машина получает её на дуге ACB, вторая — на диаметре AB. Первое начало для

цикла $ACBA$ даёт $Q_{ACB} = Q_{AB} + W$, поэтому $\dfrac{\eta_2}{\eta_1} = \dfrac{Q_{ACB}}{Q_{AB}} = 1 + \dfrac{W}{Q_{AB}}$. Для Q_{AB} нужны точки A и B: в них теплота меняет знак, $\delta Q = 0$, то есть окружность касается адиабаты. Законы: первое начало термодинамики, $U = \frac{3}{2}pV$ для одноатомного газа, работа как площадь.

Обозначения. $x = V/V_0$, $y = p/p_0$; центр окружности $O' = (1, y_c)$; $r = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ (оси в таких единицах равноправны, окружность круглая). W — работа за цикл, Q_{AB} — теплота, полученная газом на диаметре от A к B, Q_{ACB} — на дуге ACB; η_1, η_2 — КПД циклов.

1. Где теплота меняет знак. Первое начало для малого процесса:

$$\delta Q = \frac{3}{2}(p\,dV + V\,dp) + p\,dV = \frac{5}{2}p\,dV + \frac{3}{2}V\,dp.$$

На дуге ACB $\delta Q > 0$, на дуге BDA $\delta Q < 0$, значит в A и B $\delta Q = 0$ — условие адиабаты:

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{5}{3}\frac{p}{V} \qquad (pV^{5/3} = \text{const}).$$

В A и B окружность касается адиабаты (рис. 1).

2. Давление в центре окружности. Точки A и B лежат на прямой через начало координат и центр окружности, на ней $\dfrac{p}{V} = \text{const} = y_c$ (в единицах p_0/V_0). Поэтому наклон адиабаты в A и B равен $-\dfrac{5}{3}y_c$. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, а радиус лежит на прямой с наклоном y_c, поэтому наклон касательной равен $-\dfrac{1}{y_c}$. Приравниваем:

$$\frac{1}{y_c} = \frac{5}{3}y_c \quad\Longrightarrow\quad y_c^2 = \frac{3}{5}, \qquad y_c = \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0{,}775,$$

то есть давление в центре окружности $p_c = p_0\sqrt{3/5}$.

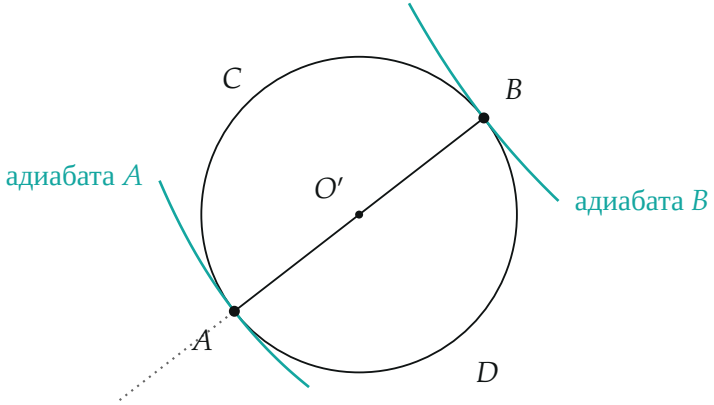


Рис. 1. Адиабаты (бирюзовые) касаются окружности в точках A и B; пунктир — прямая через начало координат и центр O', на которой лежит диаметр AB (рисунок в масштабе).

3. Координаты A и B. Единичный вектор вдоль диаметра $\vec{e} = \dfrac{(1,\,y_c)}{\sqrt{1+y_c^2}} = \dfrac{(1,\,y_c)}{\sqrt{8/5}}$. Точки лежат на расстоянии r от центра:

$$\vec{r}_{A,B} = (1,\,y_c) \mp \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{5}{8}}\,(1,\,y_c) = (1,\,y_c) \mp \frac{1}{4}\,(1,\,y_c),$$

откуда $A = \left(\dfrac{3}{4},\,\dfrac{3}{4}y_c\right)$, $B = \left(\dfrac{5}{4},\,\dfrac{5}{4}y_c\right)$.

4. Теплота на диаметре. По первому началу $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$. $p_B V_B - p_A V_A = \left(\dfrac{25}{16} - \dfrac{9}{16}\right) y_c\, p_0 V_0 = y_c\, p_0 V_0$, значит $\Delta U_{AB} = \frac{3}{2}\, y_c\, p_0 V_0$. Работа на диаметре — площадь трапеции под ним:

$$W_{AB} = \frac{p_A + p_B}{2}\,(V_B - V_A) = \frac{y_c\, p_0 V_0}{2}; \qquad Q_{AB} = 2\, y_c\, p_0 V_0.$$

Вдоль прямой $p \propto V$ $\delta Q = 4\, y_c\, x\, dx \cdot p_0 V_0 > 0$ при росте V: на пути $A \to B$ газ только получает теплоту.

5. Работа цикла и КПД. Работа за цикл — площадь половины круга

радиуса r (в единицах p_0V_0) для обоих циклов:

$$W = \frac{\pi r^2}{2} p_0V_0 = \frac{\pi}{20} p_0V_0.$$

Цикл $ABDA$: теплоту газ получает только на AB, значит $\eta_2 = \dfrac{W}{Q_{AB}}$. Цикл $ACBA$: теплоту получает на дуге ACB, на диаметре от B к A отдаёт Q_{AB} (рис. 2). Первое начало для цикла: $Q_{ACB} - Q_{AB} = W$, откуда $Q_{ACB} = Q_{AB} + W$ и $\eta_1 = \dfrac{W}{Q_{AB} + W}$. Отношение:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{Q_{AB} + W}{Q_{AB}} = 1 + \frac{W}{Q_{AB}} = 1 + \frac{\pi/20}{2y_c} = 1 + \frac{\pi}{40}\sqrt{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{\pi}{8\sqrt{15}} \approx 1{,}10.$$

КПД машины, работающей по обратимому циклу, максимален и равен КПД самого цикла.

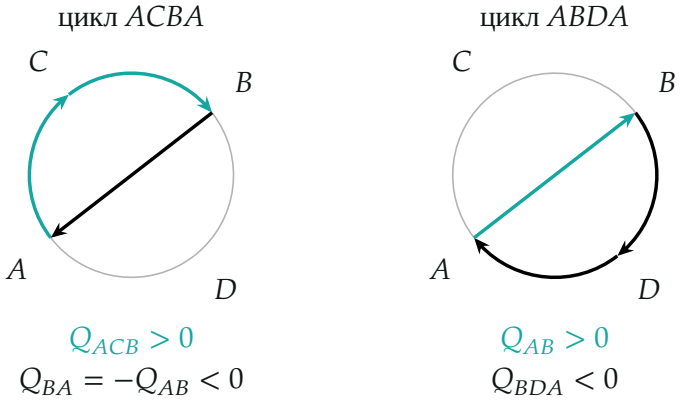


Рис. 2. Теплообмен в двух циклах (бирюзовым — теплота получена, чёрным — отдана). Оба цикла проходятся по часовой стрелке, работа обоих равна площади половины круга; вторая машина получает теплоту только на диаметре.

Обратите внимание. (1) Окружность круглая в единицах V_0 и p_0, поэтому касательная перпендикулярна радиусу. На рисунке условия масштаб условный: на самом деле центр на высоте $y_c \approx 0{,}775$ и диаметр

не под 45° (рис. 1 — в масштабе). (2) Теплота Q_{ACB} не считается интегралом по дуге: достаточно первого начала для всего цикла. (3) Из двух КПД меньше КПД первой машины: она получает теплоты больше, а работа та же.

Проверка. Числа: $Q_{AB} = 2y_c \approx 1{,}549\,p_0V_0$, $W = \pi/20 \approx 0{,}157\,p_0V_0$, $\eta_1 \approx 0{,}092$, $\eta_2 \approx 0{,}101$. Второй способ — численное интегрирование δQ вдоль дуги ACB: $Q_{ACB} = 1{,}706\,p_0V_0 = Q_{AB} + W$, и $\delta Q \geq 0$ на всей дуге ACB, $\delta Q \leq 0$ на BDA, как сказано в условии. Размерность: p_0V_0 — энергия, отношение КПД безразмерно.

Смысл: КПД второй машины выше, потому что она получает теплоту только на диаметре, а первая — ещё и на всей дуге, а работа у них одна.

Ответ. $\dfrac{\eta_2}{\eta_1} = 1 + \dfrac{\pi}{8\sqrt{15}} \approx 1{,}10$ раза (КПД второй машины больше).