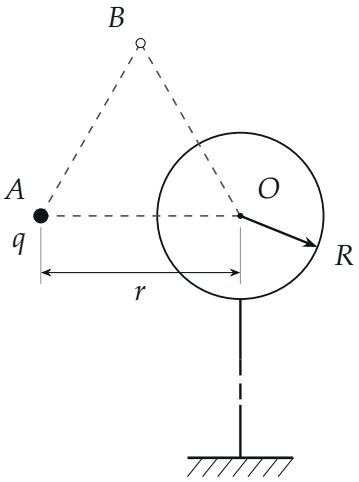
Заземление сферы

Задача 9. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 9] В точке A, расположенной на расстоянии r от центра O незаряженной проводящей сферы радиусом R, находится точечный заряд q. Сферу заземляют длинным тонким проводником. На сколько изменится (после заземления) потенциал φ_B точки B, являющейся вершиной равностороннего треугольника ABO?



▲ **Решение.** **Что происходит.** Заземлить проводник — значит соединить его с очень далёким проводником, потенциал которого принимают за нуль (потенциал на бесконечности). До заземления сфера нейтральна и не имеет заряда, но она находится в поле заряда q: на ней есть индуцированные заряды, суммарно равные нулю, они обеспечивают нулевое поле внутри сферы. Потенциал сферы при этом отличен от нуля. После заземления потенциал сферы становится нулевым, и на неё с земли приходит некоторый заряд Q. Главная идея: появляющийся заряд Q распределяется по сфере равномерно, и прежние индуцированные заряды остаются на местах. Поэтому изменение потенциала в B создаёт только равномерно заряженная сфера, а снаружи неё — как точечный заряд Q в центре. Законы: условие равновесия зарядов на проводнике (поле внутри равно нулю, потенциал всех точек одинаков), потенциал точечного

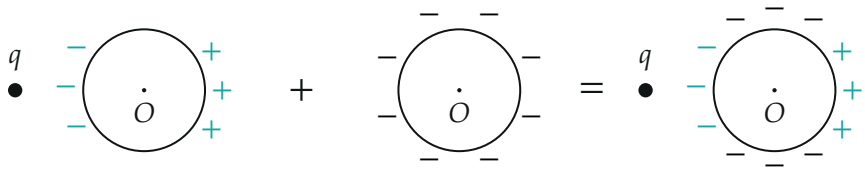
заряда $k\dfrac{q}{d}$ с $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, принцип суперпозиции, потенциал равномерно заряженной сферы.

Обозначения. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, потенциал на бесконечности равен нулю; Q — заряд, который приходит на сферу при заземлении (для определённости $q > 0$); φ_O — потенциал центра сферы; $\Delta\varphi_B$ — изменение потенциала в точке B.

1. Потенциал центра сферы. Потенциал в точке O складывается из потенциалов всех зарядов (суперпозиция). Заряд q создаёт в O потенциал $k\dfrac{q}{r}$. Каждый элемент заряда Δq_i на сфере находится на расстоянии R от центра и создаёт $k\dfrac{\Delta q_i}{R}$, поэтому все заряды сферы дают $k\dfrac{q_{\text{сф}}}{R}$, где $q_{\text{сф}}$ — полный заряд сферы. До заземления $q_{\text{сф}} = 0$, и $\varphi_O = \dfrac{kq}{r}$. Потенциал проводящей сферы во всех её точках, в том числе в центре, один и тот же: $\varphi_{\text{сф}} = \dfrac{kq}{r}$.

2. Заряд, пришедший при заземлении. После заземления потенциал сферы равен нулю. Полный заряд сферы теперь Q, а q остаётся на месте:

$$\varphi_O = \frac{kq}{r} + \frac{kQ}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q = -\frac{R}{r}\,q.$$



а) до заземления б) добавка Q в) после заземления

Рис. 1. До заземления на сфере — индуцированные заряды (бирюзовые знаки); при заземлении добавляется заряд Q, равномерный по сфере (чёрные знаки), и сумма — распределение после заземления.

3. Почему Q распределён равномерно, а прежние заряды остаются. Пока сфера была изолирована, индуцированные заряды вместе с q

создавали нулевое поле внутри сферы (иначе внутри проводника шёл бы ток). Равномерно заряженная сфера поля внутри не создаёт (теорема о сфере: внутри равномерно заряженной сферической оболочки $\vec{E} = 0$). Значит, при суперпозиции «прежние заряды плюс равномерный Q» поле внутри остаётся нулевым, а потенциал сферы равен нулю (пункт 2). Оба условия равновесия проводника выполнены, а решение с такими условиями единственно — это и есть распределение после заземления.

4. Изменение потенциала в B. Прежние заряды (и q, и индуцированные) создают в B тот же потенциал, что и до заземления: они не изменились. Добавился только равномерный заряд Q на сфере. Вне сферы поле равномерно заряженной сферы такое же, как у точечного заряда Q в центре O (рис. 2). Треугольник ABO равносторонний, поэтому $OB = r$:

$$\Delta\varphi_B = \frac{kQ}{OB} = \frac{kQ}{r} = -\frac{kR\,q}{r^2} = -\frac{Rq}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}.$$

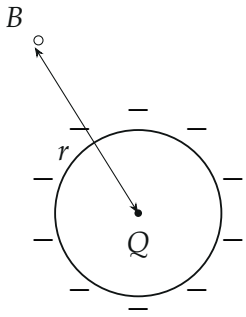


Рис. 2. Добавка к потенциалу в B: поле равномерно заряженной сферы Q вне её — как у точечного заряда Q в центре O; $OB = r$.

Обратите внимание. (1) Потенциал в точке B складывается из потенциала заряда q и всех зарядов на сфере; индуцированные заряды не равны нулю по отдельности, но их вклад в $\Delta\varphi_B$ сокращается, потому что они не изменились. (2) Равносторонность треугольника нужна только для того, чтобы расстояние от B до центра O было равно r. (3) Знак ответа: при $q > 0$ потенциал в B уменьшается (на сферу приходит отрицательный заряд), при $q < 0$ растёт.

Проверка. Размерность $\frac{kqR}{r^2}$: $k\frac{q}{r}$ — потенциал (В), множитель $\frac{R}{r}$ безразмерен. Предел $R \to 0$ (сфера пропадает): $\Delta\varphi_B \to 0$. Предел $r \to \infty$ (заряд далеко): $Q \to 0$ и сфера практически не заземляется. Второй способ — метод изображений: заземлённая сфера эквивалентна заряду-изображению $q' = -\frac{R}{r}q$, лежащему на прямой OA на расстоянии $\frac{R^2}{r}$ от центра; полный заряд, пришедший на сферу, равен $q' = Q$ — как в пункте 2 — и вклад добавки в точке B при $OB = r$ равен $\frac{kQ}{r}$ — как в пункте 4.

Смысл: заземление только добавляет на сферу равномерный заряд $Q = -qR/r$, и изменение потенциала в любой точке вне сферы — потенциал этого заряда.

Ответ. После заземления потенциал точки B изменится на $\Delta\varphi_B = -\frac{Rq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.