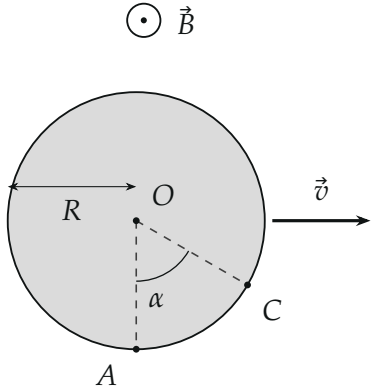
Незаряженный шарик в магнитном поле

Задача 10. [МОШ 2015/16, 11 класс, задача 10] Незаряженный металлический шарик радиусом $R = 10$ см движется в однородном магнитном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции $\vec{B}$ с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Поверхностная плотность зарядов на «полюсе» шарика в точке A оказалась равной σ_0. Определите поверхностную плотность зарядов в точке C, направление на которую из центра шарика составляет угол $\alpha = 60°$ с направлением OA (см. рис.). Чему равна разность потенциалов точек A и C? Модуль вектора магнитной индукции $B = 2$ Тл.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача о проводнике, движущемся в магнитном поле. Сила Лоренца сдвигает свободные электроны к одной стороне шарика, на другой остаётся положительный заряд. Разделение идёт, пока поле этих зарядов $\vec{E}$ не уравновесит силу Лоренца: внутри устанавливается однородное поле, а поверхностная плотность заряда пропорциональна косинусу угла от оси вдоль $\vec{E}$. Потенциал в однородном поле меняется линейно — отсюда $\varphi_A - \varphi_C$. Законы: сила Лоренца, равновесие электронов в проводнике, поле равномерно заряженного шара, принцип суперпозиции.

Обозначения. Ось x — по скорости $\vec{v}$ (вправо), ось y — в плоскости рисунка вверх, $\vec{B}$ направлен на нас (ось z). $\vec{E}$ — электрическое поле внутри шарика, θ — угол между направлением из центра O на точку

поверхности и направлением OA, $\sigma(\theta)$ — поверхностная плотность заряда. Заряд электрона $-e$.

1. Поле внутри шарика. Электроны покоятся относительно шарика, значит скорость электрона равна $\vec{v}$, и сумма сил на него равна нулю:

$$-e\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)=\vec{0} \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}.$$

При $\vec{v}=(v,0,0)$, $\vec{B}=(0,0,B)$ имеем $\vec{v}\times\vec{B}=(0,-vB,0)$, поэтому

$$\vec{E}=(0,\ vB,\ 0):\qquad E=vB=1\cdot 2=2\ \text{В/м},$$

направлено вверх. Сила Лоренца на электрон (заряд отрицательный) — тоже вверх: электроны собираются вверху, в точке A внизу плотность положительна (рис. 1).

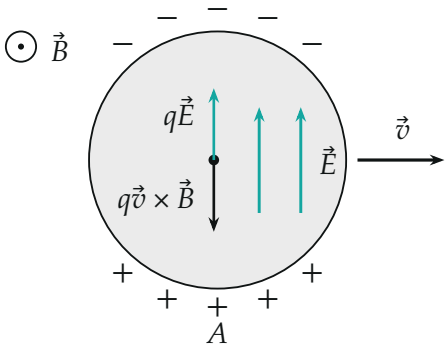


Рис. 1. Электрическое поле внутри движущегося шарика направлено вверх и уравновешивает силу Лоренца для пробного заряда: $q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}=\vec{0}$. Положительные заряды внизу (в A), отрицательные — вверху.

2. Распределение зарядов: $\sigma=\sigma_0\cos\theta$. Найдём поверхностный заряд, создающий внутри однородное поле (такое распределение единственно). Представим два шара радиуса R с объёмными плотностями заряда $+\rho$ и $-\rho$, центры которых смещены на малое δ вдоль OA: положительный сдвинут к A (рис. 2). Внутри пересечения заряды сокращаются, остаётся тонкий серп у поверхности: на угле θ от OA его толщина

равна $\delta\cos\theta$. Поэтому поверхностная плотность

$$\sigma(\theta) = \rho\,\delta\cos\theta = \sigma_0\cos\theta, \qquad \sigma_0 = \rho\delta.$$

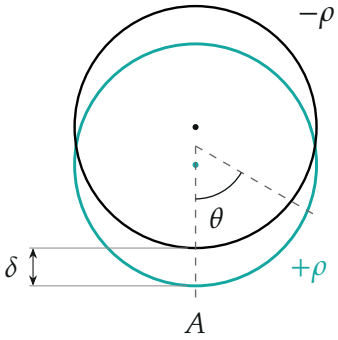


Рис. 2. Два равномерно заряженных шара $+\rho$ (бирюзовый) и $-\rho$ с центрами, смещёнными на δ: заряд остаётся только в тонком слое у поверхности, толщина слоя на угле θ равна $\delta\cos\theta$.

Поле внутри равномерно заряженного шара — $\dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0}$ ($\vec{r}$ — от центра шара). Суммируем поля двух шаров (принцип суперпозиции), $\vec{r}_\pm$ — радиус-векторы от центров $+\rho$ и $-\rho$:

$$\vec{E} = \frac{\rho\,\vec{r}_+}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\,\vec{r}_-}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\vec{\delta},$$

где $\vec{\delta}$ направлен от отрицательного шара к положительному, то есть вдоль OA (вниз). Значит поле однородно, направлено от A вверх, $E = \dfrac{\rho\delta}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$. Сравнивая с пунктом 1,

$$\sigma_0 = 3\varepsilon_0\,vB \quad (\approx 5{,}3\cdot 10^{-11}\ \text{Кл/м}^2),$$

то есть заданное σ_0 согласовано с vB.

3. Плотность в точке C**.** Угол между OC и OA равен α, поэтому

$$\sigma_C = \sigma(\alpha) = \sigma_0 \cos\alpha = \sigma_0 \cos 60^\circ = \frac{\sigma_0}{2}$$

(рис. 3). Знак тот же, что в A.

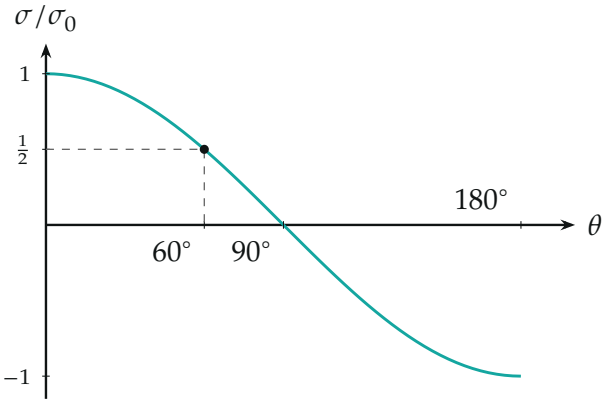


Рис. 3. Поверхностная плотность заряда $\sigma/\sigma_0 = \cos\theta$*: в* A $(\theta = 0)$ *максимум, на «экваторе»* $(\theta = 90^\circ)$ *заряда нет, в* C $(\theta = 60^\circ)$ *половина.*

4. Разность потенциалов. Электростатическое поле потенциально, поэтому идём внутри шарика по прямой от A к C (рис. 4):

$$\varphi_A - \varphi_C = \int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}\cdot(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = E\,(y_C - y_A).$$

Здесь $y_C - y_A = -R\cos\alpha + R = h$ — высота C над A, и

$$\varphi_A - \varphi_C = vBR\,(1-\cos\alpha) = 1\cdot 2\cdot 0{,}1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = 0{,}1\text{ В}.$$

Потенциал A выше: поле направлено от A вверх, а вдоль поля потенциал убывает.

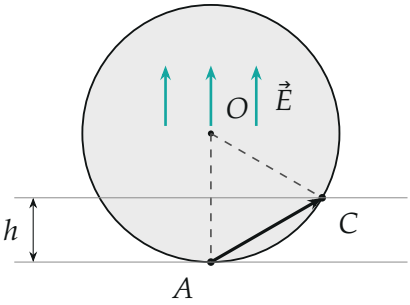


Рис. 4. Разность потенциалов между A и C определяется смещением $h = R(1-\cos\alpha)$ вдоль поля $\vec{E}$: $\varphi_A - \varphi_C = E\,h$.

Обратите внимание. (1) Шарик — проводник, но потенциалы A и C разные: эквипотенциален только неподвижный проводник, а здесь внутри есть поле, уравновешивающее магнитную силу. (2) Суммарный заряд шарика равен нулю: $\int \sigma\, dS = 0$ из-за $\cos\theta$ (положительный заряд внизу равен отрицательному вверху).

Проверка. Размерность: vB — В/м, vBR — В. Предельный случай $\alpha = 0$: $C = A$, $\varphi_A - \varphi_C = 0$ и $\sigma_C = \sigma_0$; при $\alpha = 90°$ (C на экваторе) $\sigma_C = 0$, разность потенциалов vBR. Второй способ — разложить $\vec{v}$ на $v\sin\alpha$ вдоль OC и $v\cos\alpha$ поперёк OC: первая составляющая даёт поле поперёк OC и нулевой заряд в C, вторая — поле вдоль OC и плотность $3\varepsilon_0 Bv\cos\alpha = \sigma_0\cos\alpha$ в C; сумма та же.

Смысл: движущийся в магнитном поле металл поляризуется так, чтобы внутри поле скомпенсировало силу Лоренца; поверхностный заряд убывает с косинусом угла от оси, а потенциал линейно падает вдоль поля.

Ответ. $\sigma_C = \sigma_0\cos\alpha = \dfrac{\sigma_0}{2}$; $\varphi_A - \varphi_C = vBR\,(1-\cos\alpha) = 0{,}1$ В.